ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΠΛΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΑΤΕΣ

- **Αντιστάτες συνδεμένοι σε σειρά**
- **Αντιστάτες συνδεμένοι παράλληλα**
- **Κύκλωμα διαιρέτη τάσης**
- **Κύκλωμα διαιρέτη ρεύματος**
- **Επίδραση της εσωτερικής αντίστασης των οργάνων μέτρησης**
- **Γέφυρα Wheatstone**
- **Μετασχηματισμοί κυκλωμάτων Δ σε Υ**

Ι. Κυπριανίδης, Γ. Στόϊκος

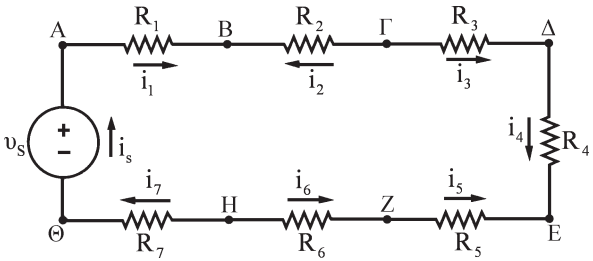
2. ΑΠΛΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΑΤΕΣ

2.1. Εισαγωγή

Στο σημείο αυτό της μελέτης μας είμαστε σε θέση να επιλύσουμε μερικά απλά κυκλώματα εφαρμόζοντας το νόμο του Ohm και τους νόμους του Kirchhoff. Υπάρχουν δύο λόγοι, που εξηγούν την επιλογή μας, να ξεκινήσουμε με την επίλυση αυτών των απλών κυκλωμάτων, προτού αναπτύξουμε πιο κομψές τεχνικές ανάλυσης των κυκλωμάτων. Ο πρώτος είναι ότι θα μας δώσει την ευκαιρία να εξοικειωθούμε με τους νόμους, που βρίσκονται πίσω από τις τεχνικές αυτές, και ο δεύτερος ότι θα μας επιτρέψει να παρουσιάσουμε μερικά κυκλώματα, που έχουν σημαντικές εφαρμογές. Στο κεφάλαιο αυτό οι πηγές, που θα χρησιμοποιήσουμε, θα παράγουν τάσεις και ρεύματα σταθερά, δηλαδή αμετάβλητα σε σχέση με το χρόνο. Οι πηγές αυτού του είδους ονομάζονται πηγές συνεχούς ρεύματος *(direct current)* ή πηγές dc.

2.2. Αντιστάτες συνδεμένοι σε σειρά

"Όταν τα στοιχεία ενός κυκλώματος διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, τότε λέμε ότι *τα στοιχεία αυτά είναι συνδεδεμένα σε σειρά"*. Οι αντιστάτες στο κύκλωμα του σχ. 2.1 είναι συνδεμένοι σε σειρά.



Σχήμα 2.1

Είναι εύκολο να δείξουμε, ότι οι αντιστάτες αυτοί διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, εφαρμόζοντας το νόμο των ρευμάτων του Kirchhoff σε κάθε κόμβο

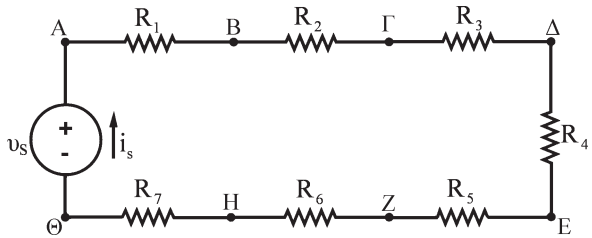
του κυκλώματος. Πράγματι θα έχουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
& i_s = i_1 \\
& i_1 + i_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = -i_2 \\
& i_2 + i_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -i_2 = i_3 \\
& i_3 = i_4 \\
& i_4 + i_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_4 = -i_5 \\
& i_6 = i_5 \\
& i_6 + i_7 = 0 \quad \Rightarrow \quad -i_6 = i_7 \\
& i_7 = i_s
\end{aligned}
$$

που γράφονται

$$i_s = i_1 = -i_2 = i_3 = i_4 = -i_5 = -i_6 = i_7 \tag{2.1}$$

Η εξ. (2.1) μας λέει ότι, αν γνωρίζουμε το ρεύμα, που διαρρέει ένα αντιστάτη, τότε γνωρίζουμε τα ρεύματα, που διαρρέουν κάθε αντιστάτη. Έτσι το κύκλωμα του σχ. 2.1 μπορεί να ξανασχεδιαστεί, όπως στο σχ. 2.2, όπου έχουμε διατηρήσει μόνο το ρεύμα i_s.



Σχήμα 2.2. Αντιστάτες συνδεμένοι σε σειρά, που διαρρέονται από το ρεύμα i_S.

Για να υπολογίσουμε το ρεύμα i_s, εφαρμόζουμε το νόμο των τάσεων του Kirchhoff κατά μήκος της κλειστής διαδρομής, θεωρώντας εξ ορισμού ότι η τάση στα άκρα κάθε αντιστάτη πέφτει κατά τη φορά του ρεύματος i_s. Θα έχουμε:

$$-\upsilon_s + i_sR_1 + i_sR_2 + i_sR_3 + i_sR_4 + i_sR_5 + i_sR_6 + i_sR_7 = 0 \tag{2.2}$$

που γράφεται

$$\upsilon_s = i_s(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7) \tag{2.3}$$

Η σημασία της εξ. (2.3) είναι ότι καθώς προχωράμε στον υπολογισμό του i_s, οι επτά αντιστάτες μπορούν να αντικατασταθούν από ένα μοναδικό αντιστάτη, που η αριθμητική τιμή του είναι ίση με το άθροισμα των τιμών των

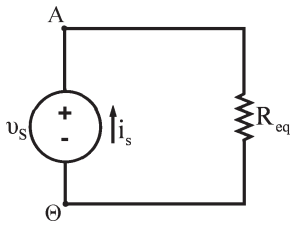
επτά αντιστατών,δηλ.

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7 \tag{2.4}$$

και

$$\upsilon_s = i_s R_{eq} \tag{2.5}$$

Έτσι το κύκλωμα του σχ. 2.2 ξανασχεδιάζεται στο σχ. 2.3.

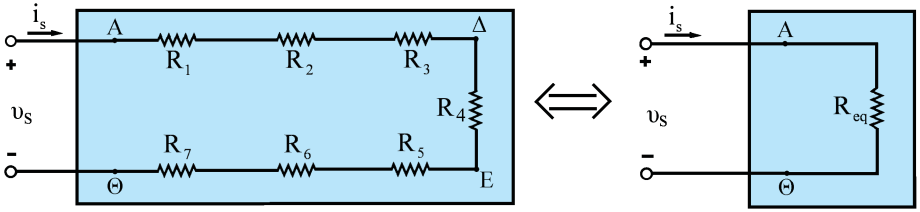


Σχήμα 2.3. Απλοποιημένη μορφή του κυκλώματος του σχ. 2.2.

Το άμεσο συμπέρασμα, που εξάγεται είναι ότι "αν κ αντιστάτες συνδέονται σε σειρά, ο ισοδύναμος αντιστάτης θα έχει τιμή αντίστασης ίση με το άθροισμα των κ αντιστάσεων". Αυτό, μαθηματικά εκφρασμένο γράφεται

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{\kappa} R_i = R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_\kappa \tag{2.6}$$

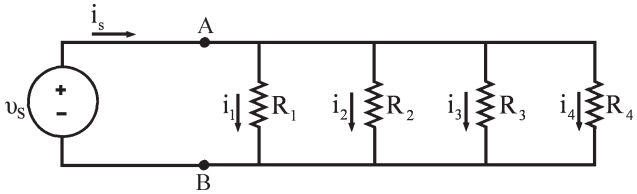
Ένας άλλος τρόπος προσέγγισης της έννοιας της ισοδύναμης αντίστασης είναι να θεωρήσουμε ότι η αλυσίδα των αντιστατών βρίσκεται μέσα σ' ένα "*μαύρο κουτί*", δηλαδή σε μια αδιαφανή συσκευασία, ώστε να μη γνωρίζουμε το ακριβές περιεχόμενο του. Στην περίπτωση αυτή καλούμαστε να πούμε τί περιέχει το "*κουτί*" μελετώντας τη σχέση μεταξύ τάσης και ρεύματος στους ακροδέκτες του "*κουτιού*". Είναι όμως αδύνατο να πούμε, αν το "*κουτί*" περιέχει κ αντιστάτες ή ένα ισοδύναμο αντιστάτη. Η μέθοδος αυτή μελέτης του κυκλώματος του σχ. 2.2 φαίνεται σχηματικά στο σχ. 2.4.



Σχήμα 2.4

2.3. Αντιστάτες συνδεμένοι παράλληλα

"Δύο ή περισσότεροι αντιστάτες θεωρούνται ότι είναι συνδεμένοι παράλληλα, όταν *στους ακροδέκτες τους εφαρμόζεται η ίδια τάση"*. Το κύκλωμα του σχ. 2.5 είναι ένα παράδειγμα αντιστατών συνδεμένων παράλληλα.



Σχήμα 2.5

Οι παράλληλα συνδεμένοι αντιστάτες μπορούν να αντικατασταθούν από ένα μοναδικό ισοδύναμο αντιστάτη, που η τιμή του δίνεται από τη σχέση

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \tag{2.7}$$

Η εξ. (2.7) μπορεί να προκύψει με άμεση εφαρμογή του νόμου του Ohm και του νόμου των ρευμάτων του Kirchhoff, ως εξής: Έστω i_1, i_2, i_3 και i_4 τα ρεύματα, που διαρρέουν τους αντιστάτες R_1, R_2, R_3 και R_4 αντίστοιχα, με φορά από τον κόμβο A προς τον κόμβο B, που είναι και η θετική φορά τους. Από τον νόμο των ρευμάτων του Kirchhoff προκύπτει

$$i_s = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 \tag{2.8}$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Ohm στα άκρα των αντιστατών και παίρνοντας υπόψη μας και τον ορισμό της παράλληλης σύνδεσης έχουμε

$$i_1 R_1 = i_2 R_2 = i_3 R_3 = i_4 R_4 = \upsilon_s \tag{2.9}$$

Από την εξ. (2.9) προκύπτει ότι

$$i_1 = \frac{\upsilon_s}{R_1} \qquad i_2 = \frac{\upsilon_s}{R_2}$$
$$i_3 = \frac{\upsilon_s}{R_3} \quad \text{και} \quad i_4 = \frac{\upsilon_s}{R_4} \tag{2.10}$$

Όταν αντικαταστήσουμε την εξ. (2.10) στην εξ. (2.8) προκύπτει

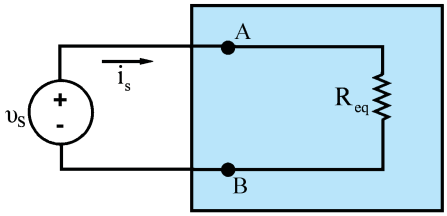
$$i_s = \upsilon_s \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \tag{2.11}$$

που μπορεί να γραφεί

$$\frac{i_s}{\upsilon_s} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \tag{2.12}$$

που είναι και η σχέση, που θέλαμε να αποδείξουμε.

Έτσι το κύκλωμα του σχ. 2.5 μπορεί να αντικατασταθεί από το κύκλωμα του σχ. 2.6.



Σχήμα 2.6

Για κ αντιστάτες συνδεμένους παράλληλα η εξ. (2.7) γίνεται

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_\kappa} \tag{2.13}$$

Μερικές φορές είναι πιο βολικό να χρησιμοποιούμε την αγωγιμότητα, όταν έχουμε παράλληλα συνδεμένους αντιστάτες. Στην περίπτωση αυτή η εξ. (2.13) γράφεται

$$G_{eq} = \sum_{i=1}^{\kappa} G_i = G_1 + G_2 + \ldots + G_\kappa \tag{2.14}$$

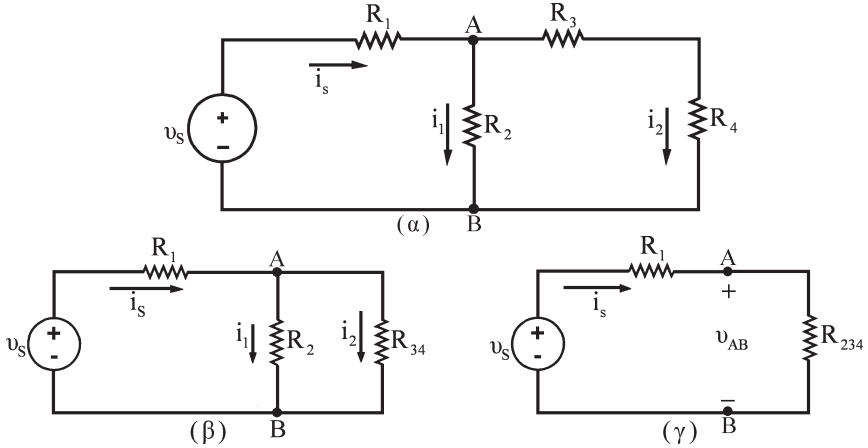
Από τις πιο συχνές περιπτώσεις είναι η σύνδεση δύο μόνο αντιστατών παράλληλα. Από την εξ. (2.13) προκύπτει

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \tag{2.15}$$

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.16}$$

Θα κλείσουμε την παρουσίαση των συνδεμένων σε σειρά και παράλληλα αντιστατών με ένα αριθμητικό παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.1. Στο κύκλωμα του σχ. 2.7(α) να υπολογιστούν τα ρεύματα i_s, i_1, και i_2, όπου $\upsilon_s = 120V$, $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 18\Omega$, $R_3 = 3\Omega$ και $R_4 = 6\Omega$.



Σχήμα 2.7

Λύση

Ο σκοπός του παραδείγματος αυτού είναι να δείξει, πώς μπορούν να υπολογιστούν τα τρία άγνωστα ρεύματα χρησιμοποιώντας ισοδύναμους αντιστάτες, για να αντικαταστήσουμε αντιστάτες συνδεμένους σε σειρά ή παράλληλα.

Παρατηρώντας το κύκλωμα του σχ. 2.7 (α) διαπιστώνουμε ότι οι αντιστάτες R_3 και R_4 είναι συνδεμένοι σε σειρά, οπότε μπορούν να αντικατασταθούν από τον ισοδύναμο τους R_{34}, για τον οποίο

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 9\Omega$$

Έτσι το αρχικό κύκλωμα αντικαθίσταται από το ισοδύναμο του, του σχ. 2.7 (β), στο οποίο οι αντιστάτες R_2 και R_{34} είναι παράλληλα συνδεμένοι και μπορούν να αντικατασταθούν από τον ισοδύναμο τους R_{234}, που θα είναι λόγω της εξ. (2.16)

$$R_{234} = \frac{R_2 R_{34}}{R_2 + R_{34}} = \frac{18 \cdot 9}{18 + 9} = 6\Omega \qquad (2.18)$$

Το απλοποιημένο τώρα κύκλωμα φαίνεται στο οχ. 2.7 (γ) και περιέχει δύο μόνο αντιστάτες R_1, και R_{234} συνδεμένους σε σειρά. Θα είναι

$$i_s = \frac{\upsilon_s}{R_1 + R_{234}} = \frac{120}{10} = 12\,A$$

Στο κύκλωμα του σχ. 2.7 (γ) έχουμε επιπλέον σημειώσει την τάση υ_{AB}, για να βοηθηθεί η παραπέρα επεξεργασία. Χρησιμοποιώντας το νόμο του Ohm υπολογίζουμε την τιμή της

$$\upsilon_{AB} = i_s \cdot R_{234} = (12A)(6\Omega) = 72V \qquad (2.19)$$

Επιστρέφοντας στο κύκλωμα του σχ. 2.7 (β) παρατηρούμε ότι η υ_{AB} είναι η τάση στα άκρα των R_2 και R_{34}, οπότε εφαρμόζοντας το νόμο του Ohm παίρνουμε

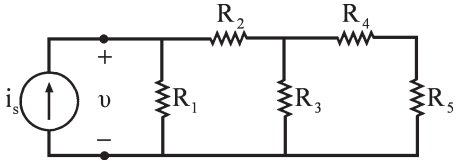
$$i_1 = \frac{\upsilon_{AB}}{R_2} = \frac{72V}{18\Omega} = 4A$$

και

$$i_2 = \frac{\upsilon_{AB}}{R_{34}} = \frac{72V}{9\Omega} = 8A$$

Πριν αφήσουμε το παράδειγμα αυτό προτείνουμε να επιβεβαιώσετε ότι η λύση ικανοποιεί το νόμο των ρευμάτων του Kirchhoff σε κάθε κόμβο, καθώς και το νόμο των τάσεων του Kirchhoff κατά μήκος κάθε κλειστής διαδρομής (σημειώστε ότι υπάρχουν τρεις κλειστές διαδρομές, που πρέπει να ελεγχθούν). Μπορείτε επίσης να δείξετε ότι η ισχύς, που αποδίδεται από την πηγή τάσης είναι ίση με τη συνολική ισχύ, που απορροφούν οι αντιστάτες.

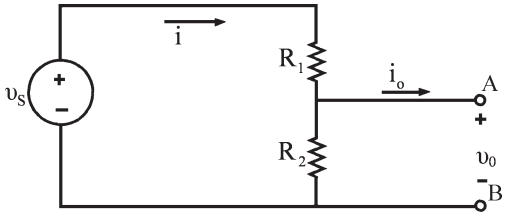
Άσκηση εφαρμογής 2.1. Στο κύκλωμα του σχ. 2.8 να βρεθούν **α)** η τάση υ, **β)** η ισχύς, που αποδίδεται από την πηγή έντασης στο κύκλωμα και **γ)** η ισχύς που απορροφάται από τον αντιστάτη R_5. Δίνονται: $i_s = 5A$, $R_1 = 30\Omega$, $R_2 = 7.2\Omega$, $R_3 = 64\Omega$, $R_4 = 6\Omega$ και $R_5 = 10\Omega$.



Σχήμα 2.8

2.4. Κύκλωμα διαιρέτη τάσης

Πολλές φορές, ειδικά σε ηλεκτρονικά κυκλώματα, είναι απαραίτητο να έχουμε διαφορετικές τιμές τάσης για τροφοδοσία διαφορετικών τμημάτων του κυκλώματος χρησιμοποιώντας μία και μοναδική πηγή τάσης. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με το κύκλωμα του σχ. 2.9, που είναι γνωστό σαν κύκλωμα διαιρέτη τάσης.



Σχήμα 2.9

Το κύκλωμα αυτό μπορεί να αναλυθεί με άμεση εφαρμογή του νόμου του Ohm και των νόμων του Kirchhoff. Για να διευκολύνουμε την ανάλυση σημειώνουμε τα ρεύματα i και i_0 όπως φαίνονται στο σχ. 2.9. Ξεκινάμε θεωρώντας ότι στα άκρα A, B δεν υπάρχει συνδεμένη αντίσταση φορτίου, οπότε το ρεύμα φορτίου i_0 είναι μηδέν, και οι αντιστάτες R_1 και R_2 θα διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα. Εφαρμόζοντας το νόμο των τάσεων του Kirchhoff κατά μήκος της κλειστής διαδρομής προκύπτει

$$\upsilon_s = i R_1 + i R_2 \tag{2.20}$$

ή

$$i = \frac{\upsilon_s}{R_1 + R_2} \tag{2.21}$$

Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Ohm, για να υπολογίσουμε την τάση υ_0,

$$\upsilon_0 = i R_2 = \upsilon_s \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.22}$$

Από την εξ. (2.22) βλέπουμε ότι η τάση υ_0 είναι ένα κλάσμα της υ_s, όπου το κλάσμα είναι ο λόγος της R_2 προς ($R_1 + R_2$), που έχει τιμή μικρότερη από τη μονάδα. Η τάση εξόδου υ_0 είναι λοιπόν μικρότερη από την τάση της

πηγής υ_s. Για συγκεκριμένες τιμές των υ_0 και υ_s υπάρχει ένας άπειρος αριθμός συνδυασμών τιμών των R_1 και R_2 ώστε να δώσουν τον σωστό λόγο. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η υ_s είναι ίση με 15V και η υ_0 είναι ίση με 5V, οπότε

$$\frac{\upsilon_0}{\upsilon_s} = \frac{1}{3}$$

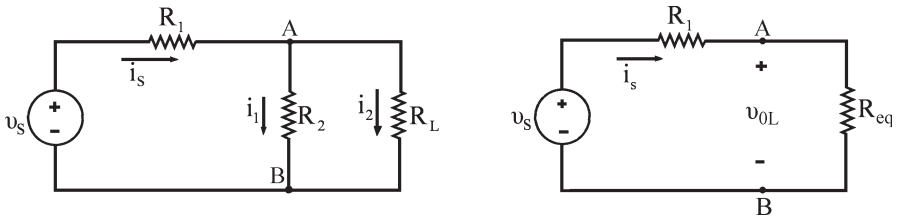
και από την εξ. (2.22) βρίσκουμε ότι αυτός ο λόγος θα ικανοποιείται, όταν

$$R_2 = \frac{1}{2} R_1$$

Άλλοι παράγοντες, που υπεισέρχονται και καθορίζουν την επιλογή των αντιστατών R_1 και R_2 είναι (α) η απώλεια ισχύος στο διαιρέτη τάσης και (β) η τιμή της αντίστασης φορτίου, που θα συνδεθεί παράλληλα στην R_2.

2.4.1. Διαιρέτης τάσης υπό φορτίο

Έστω R_L η αντίσταση φορτίου, που συνδέεται παράλληλα στην R_2, όπως φαίνεται στο σχ. 2.10



Σχήμα 2.10

Ακολουθώντας την ίδια πορεία ανάλυσης, όπως προηγουμένως, βρίσκουμε

$$\upsilon_{0L} = \frac{R_{eq}}{R_1 + R_{eq}} \upsilon_s \tag{2.23}$$

όπου

$$R_{eq} = \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} \tag{2.24}$$

Αντικαθιστώντας την R_{eq} από την εξ. (2.24) στην εξ. (2.23) παίρνουμε

$$\upsilon_{0L} = \frac{R_2}{R_1\left[1 + \left(R_2 / R_L\right)\right] + R_2} \upsilon_s \tag{2.25}$$

Παρατηρούμε ότι η εξ. (2.25) μεταπίπτει στην εξ. (2.22) καθώς η R_L τείνει στο άπειρο. Η σημασία της εξ. (2.25) είναι ότι καθώς $R_L >> R_2$ ο λόγος των τάσεων $\upsilon_{0L} / \upsilon_s$ παραμένει ουσιαστικά ανεπηρέαστος από την προσθήκη του φορτίου στον διαιρέτη τάσης.

Αν η απόκλιση της τιμής της υ_{0L} από τη υ_0 θεωρείται αποδεκτή μέχρι α %, αυτό σημαίνει ότι

$$\upsilon_{0L} \geq \frac{100 - \alpha}{100} \upsilon_0$$

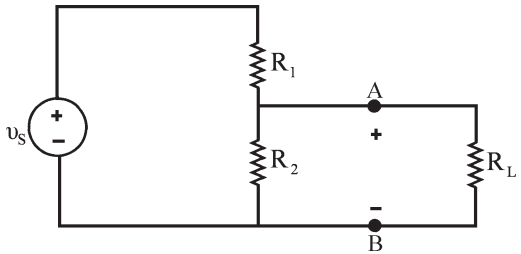
και από τις εξ. (2.22) και (2.23) θα προκύψει

$$\frac{R_{eq}}{R_1 + R_{eq}} \upsilon_s \geq \left(\frac{100 - \alpha}{100} \right) \frac{R_2}{R_1 + R_2} \upsilon_s \qquad (2.26)$$

όπου η R_{eq} δίνεται από την εξ. (2.24). Το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$R_L \geq \left(\frac{100 - \alpha}{\alpha} \right) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad (2.27)$$

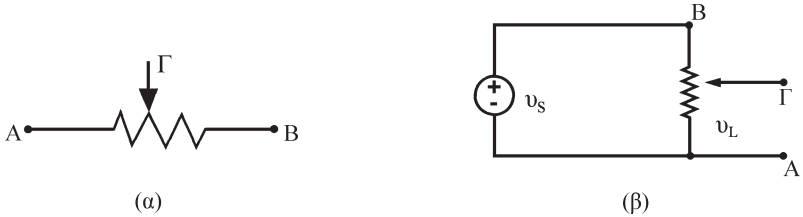
Άσκηση εφαρμογής 2.2. Στο κύκλωμα του διαιρέτη τάσης του σχ. 2.11, όπου $\upsilon_s = 120V$, $R_1 = 30k\Omega$ και $R_2 = 50k\Omega$ να βρεθούν: α) Η τάση εξόδου υ_0 χωρίς φορτίο, β) η τάση εξόδου υ_{0L}, όταν υπάρχει φορτίο R_L ίσο με 450 kΩ, γ) πόση ισχύς απορροφάται από τον αντίσταση R_1, αν βραχυκυκλωθούν κατά τύχη οι ακροδέκτες του αντιστάτη φορτίου;



Σχήμα 2.11

2.4.2. Ποτενσιόμετρο

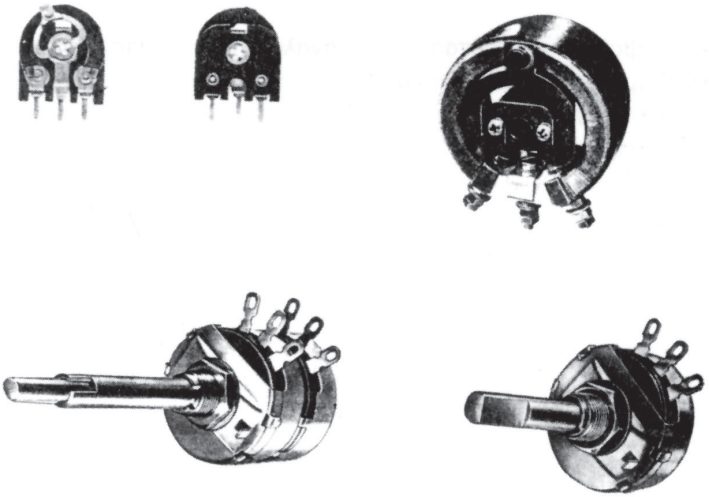
Το ποτενσιόμετρο είναι ένας μεταβλητός αντιστάτης με τρεις λήψεις όπως φαίνεται στο σχ. 2.12(α).



Σχήμα 2.12

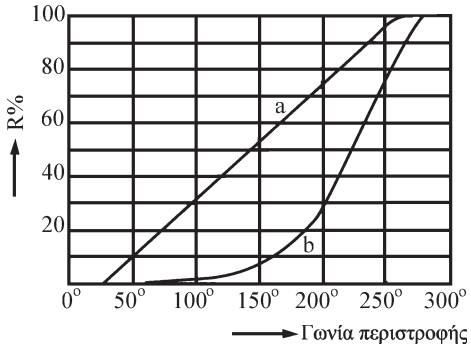
Οι λήψεις Α και Β είναι σταθερές ενώ η Γ είναι κινητή. Η ενδιάμεση λήψη μπορεί να κινηθεί πάνω στο κατασκευαστικό υλικό του αντιστάτη και να μας δίνει κάθε φορά ένα διαφορετικό λόγο αντίστασης.

Βέβαια εύκολα γίνεται κατανοητό ότι θα μπορούσε ένα ποτενσιόμετρο να χρησιμοποιηθεί ως διαιρέτης τάσης. Αυτό ακριβώς φαίνεται στο κύκλωμα του σχ. 2.12(β). Μετακινώντας τη μεσαία επαφή μπορούμε να μεταβάλλουμε την τάση υ_L από την τιμή μηδέν, όταν η επαφή Γ συμπίπτει με τον ακροδέκτη Α, μέχρι την τάση υ_s, όταν η επαφή Γ συμπίπτει με τον ακροδέκτη Β. Τα ποτενσιόμετρα τα διακρίνουμε σε απλά, διπλά και τριπλά, σε ποτενσιόμετρα με διακόπτη και σε ποτενσιόμετρα τριμμερούς άνθρακος. Μερικά είδη ποτενσιομέτρων φαίνονται στο σχ. 2.13.



Σχήμα 2.13

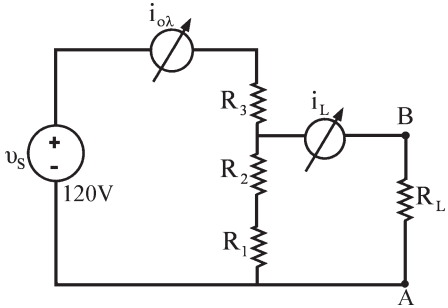
Τα χαρακτηριστικά στοιχεία των ποτενσιομέτρων και των ροοστατών (**σημείωση:** ροοστάτης γίνεται το ίδιο το ποτενσιόμετρο, αν χρησιμοποιήσουμε ως ακροδέκτες τη μια από τις δύο σταθερές λήψεις και την κινητή λήψη) είναι: i) η τιμή της μέγιστης αντίστασης τους σε Ω, ii) η μέγιστη ισχύς τους σε watts και iii) ο νόμος της μεταβολής της τιμής τους. Ο νόμος της μεταβολής εκφράζεται από καμπύλες που δείχνουν τη μεταβολή της R (συνήθως επί τοις εκατό της μέγιστης τιμής) σε συνάρτηση με τη μετατόπιση κινητής λήψης, ή τη γωνία περιστροφής για την κινητή λήψη, όπως φαίνεται στο σχ. 2.14.



Σχήμα 2.14

Όταν η μεταβολή της αντίστασης είναι ανάλογη της γωνίας περιστροφής, τα ποτενσιόμετρα ονομάζονται **γραμμικά.** Αν πάλι η μεταβολή της αντίστασης είναι ανάλογη του λογαρίθμου της γωνίας περιστροφής, τα ποτενσιόμετρα ονομάζονται **λογαριθμικά**.

Παράδειγμα 2.2. Έχουμε τον διαιρέτη τάσης του σχ. 2.15 με $R_1 = R_2 = R_3 =$ 20 kΩ και με αντιστάτη φορτίου $R_L = 40\,k\Omega$. Η τάση της πηγής είναι 120 V. Να βρεθεί η τάση στα σημεία A, B, α) χωρίς φορτίο και β) με φορτίο.



Σχήμα 2.15

Λύση

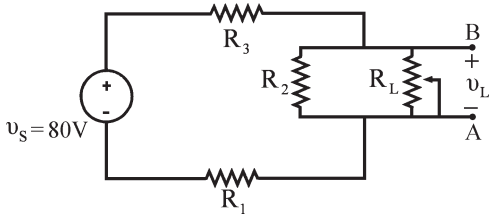
α) Χωρίς φορτίο:

$$\upsilon_{AB} = \upsilon_s \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \Rightarrow \upsilon_{AB} = 120\frac{40}{60} = 80 \text{ volts}$$

β) Με φορτίο:

$$\upsilon_{AB} = \upsilon_s \frac{(R_1 + R_2)//R_L}{R_3(R_1 + R_2)//R_L} \Rightarrow \upsilon_{AB} = 120\frac{(20+20)//40}{20+(20+20)//60} = 60 \text{ volts}$$

Παράδειγμα 2.3. Δίνεται ο διαιρέτης τάσης του σχ. 2.16 με $R_1 = 8\ k\Omega$, $R_2 = 2\ k\Omega$ και $R_3 = 10\ k\Omega$. Η τάση της πηγής είναι 80V και, ως αντίσταση φορτίου χρησιμοποιείται ένα ποτενσιόμετρο 2MΩ, συνδεδεμένο ως ροοστάτης. Να υπολογισθεί η τάση V_L για τις δύο ακραίες τιμές του ποτενσιόμετρου.



Σχήμα 2.16

Λύση

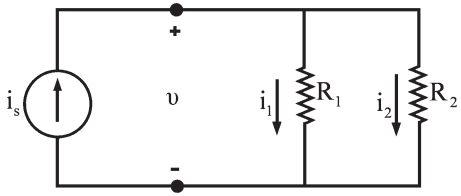
α) Η μία τιμή του ποτενσιόμετρου είναι $R_L = 0\ \Omega$. Άρα και η τάση υ_L είναι $\upsilon_L = 0$.

β) Για $R_L = 2\ M\Omega$ έχουμε:

$$\upsilon_L = \upsilon_S \frac{(R_2 // R_L)}{R_1 + R_2 + R_3 // R_L} \Rightarrow \upsilon_L = 16 \text{ V}$$

2.5. Κύκλωμα διαιρέτη ρεύματος

Το κύκλωμα του διαιρέτη ρεύματος, που φαίνεται στο σχ. 2.17 αποτελείται από δύο αντιστάτες συνδεμένους παράλληλα, που τροφοδοτούνται από πηγή ρεύματος. Ο διαιρέτης ρεύματος είναι σχεδιασμένος, ώστε να διαιρεί το ρεύμα i_S μεταξύ των αντιστατών R_1 και R_2.



Σχήμα 2.17

Η σχέση μεταξύ του ρεύματος i_S και των ρευμάτων i_1, i_2, που διαρρέουν τους αντιστάτες R_1 και R_2 αντίστοιχα, μπορεί να βρεθεί με άμεση εφαρμογή του νόμου του Ohm και του νόμου των ρευμάτων του Kirchhoff. Η τάση στα άκρα των αντιστατών είναι

$$\upsilon = i_1 R_1 = i_2 R_2 = i_S \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.28}$$

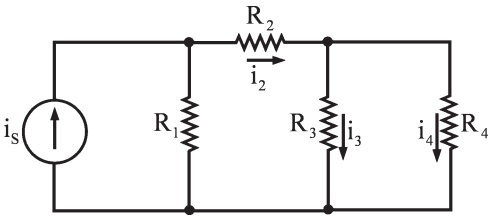
Από την εξ.(2.28) προκύπτει

$$i_1 = i_S \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.29}$$

και

$$i_2 = i_S \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{2.30}$$

Παράδειγμα 2.4. Στο κύκλωμα του σχ. 2.18 να βρεθεί η ισχύς, που απορροφάται από τον αντιστάτη R_4. Δίνονται: i_s = 10A, R_1 = 16Ω, R_2 = 1.6Ω, R_3 = 4Ω, R_4 = 6Ω.



Σχήμα 2.18

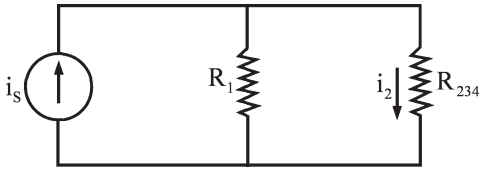
Λύση

Οι αντιστάτες R_3 και R_4 είναι παράλληλα συνδεμένοι και μπορούν να αντικατασταθούν από τον ισοδύναμο τους R_{34}, που θα έχει τιμή αντίστασης

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 2.4\ \Omega$$

Ο R_{34} είναι συνδεμένος σε σειρά με τον R_2, οπότε το αρχικό κύκλωμα απλοποιείται, όπως φαίνεται στο σχ. 2.19, όπου

$$R_{234} = R_2 + R_{34} = 4\ \Omega$$



Σχήμα 2.19

Το ρεύμα i_2, που διαρρέει τον αντιστάτη R_2 στο σχήμα 2.18, είναι το ίδιο μ' αυτό που διαρρέει τον ισοδύναμο αντιστάτη R_{234} στο σχήμα 2.19. Το i_2 μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την εξ. (2.30) του διαιρέτη ρεύματος,

$$i_2 = i_S \frac{R_1}{R_1 + R_{234}} = 8\ \text{A}$$

Στο κύκλωμα του σχ. 2.18 το ρεύμα i_2 διαιρείται στα ρεύματα i_3 και i_4 που διαρρέουν τους αντιστάτες R_3 και R_4. Εφαρμόζοντας την εξ. (2.30) προκύπτει

$$i_4 = i_2 \frac{R_3}{R_3 + R_4} = 3.2\ \text{A}$$

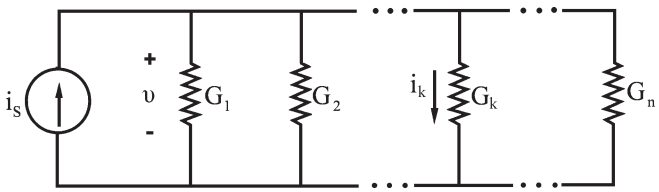
και η ισχύς, που αποτίθεται στον αντιστάτη R_4, θα είναι

$$P_4 = i_4^2 R_4 = 61.44\ \text{W}$$

2.5.1. Κύκλωμα διαιρέτη ρεύματος. Η γενική περίπτωση.

Στη γενική περίπτωση του κυκλώματος του διαιρέτη ρεύματος έχουμε n παράλληλα συνδεμένους αντιστάτες με αγωγιμότητες $G_1, G_2, ..., G_k, ... G_n$, α-

ντίστοιχα, που τροφοδοτούνται από πηγή έντασης ρεύματος i_S .



Σχήμα 2.20

Επειδή οι αντιστάτες είναι παράλληλα συνδεμένοι θα είναι

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = ... = \upsilon_k = ...\upsilon_n \equiv \upsilon$$

και

$$i_S = G_{eq} \cdot \upsilon$$

όπου $$G_{eq} = G_1 + G_2 + ... + ... + G_k + ... + G_n$$

Το ρεύμα που διαρρέει τον k-οστό αντιστάτη θα είναι

$$i_k = G_k \cdot \upsilon$$

ήτοι

$$\boxed{i_k = \frac{G_k}{G_{eq}} i_S}$$

και εκφράζει τη γενική περίπτωση.

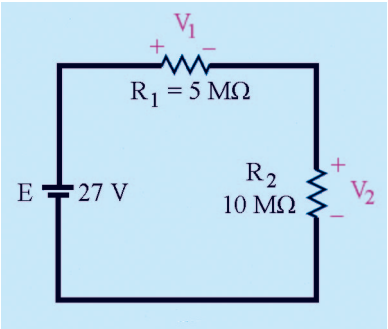
2.6. Επίδραση της εσωτερικής αντίστασης των οργάνων μέτρησης.

Τα βολτόμετρα και τα αμπερόμετρα έχουν εσωτερική αντίσταση, η οποία, όταν είναι συγκρίσιμη με τις τιμές των αντιστατών του κυκλώματος, στο οποίο θέλουμε να κάνουμε μετρήσεις, τότε παρατηρούνται σημαντικές αποκλίσεις από τις θεωρητικά υπολογιζόμενες τιμές. Ο βαθμός, κατά τον οποίο επηρεάζεται το κύκλωμα, ονομάζεται **φαινόμενο επίδρασης φορτίου** (loading effect, LE) του οργάνου και δίνεται από τη σχέση

LE={(αναμενόμενη τιμή-μετρούμενη τιμή)/(αναμενόμενη τιμή)}×100%

Στην πράξη, είναι αδύνατο για οποιοδήποτε όργανο μέτρησης να έχει μηδενικό φαινόμενο επίδρασης φορτίου, επειδή οπωσδήποτε απορροφά κάποιο ποσό ενέργειας από το υπό μέτρηση κύκλωμα, με συνέπεια να επιδρά στη λειτουργία του κυκλώματος.

Παράδειγμα 2.5. Να υπολογιστεί το φαινόμενο επίδρασης φορτίου, αν ένα ψηφιακό βολτόμετρο, το οποίο έχει εσωτερική αντίσταση ίση με 10MΩ, χρησιμοποιηθεί για να μετρήσει τις τάσεις V_1 και V_2 στο κύκλωμα του σχ. 2.21.



Σχήμα 2.21

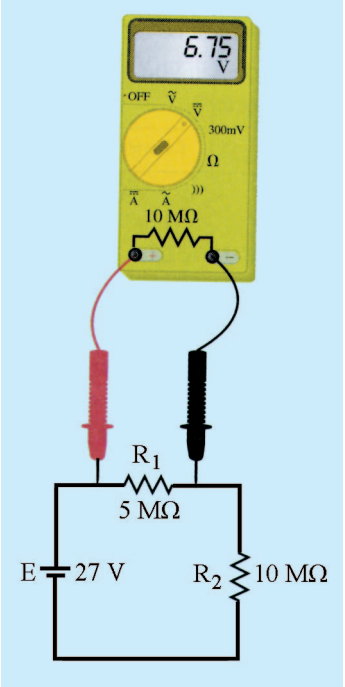
Λύση

Για να υπολογίσουμε το φαινόμενο επίδρασης φορτίου, θα χρειαστεί να υπολογίσουμε την τάση στο κύκλωμα χωρίς την παρουσία του οργάνου μέτρησης και στη συνέχεια με το όργανο συνδεμένο. Στο κύκλωμα του σχ.2.21, η τάση στα άκρα κάθε αντιστάτη χωρίς την παρουσία του οργάνου είναι

$$V_1 = \left(\frac{5\ \text{MΩ}}{5\ \text{MΩ} + 10\ \text{MΩ}}\right)(27\ \text{V}) = 9.0\ \text{V}$$

$$V_2 = \left(\frac{10\ \text{MΩ}}{5\ \text{MΩ} + 10\ \text{MΩ}}\right)(27\ \text{V}) = 18.0\ \text{V}$$

Όταν συνδέσουμε το βολτόμετρο στα άκρα του αντιστάτη R_1, για να μετρήσουμε την τάση V_1, το αποτέλεσμα είναι ισοδύναμο με τη σύνδεση ενός αντιστάτη 10 MΩ παράλληλα με τον R_1, όπως φαίνεται στο σχ.2.22.



Σχήμα 2.22

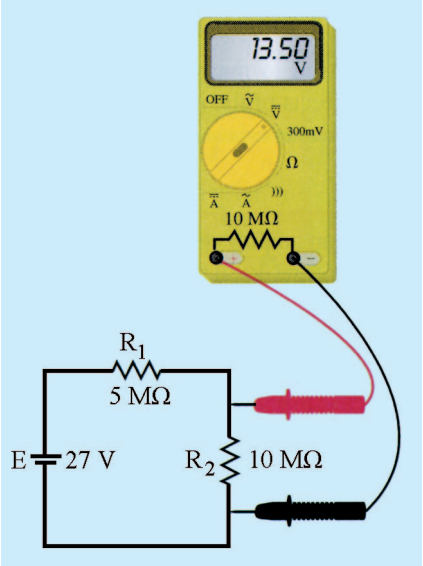
Η τάση στα άκρα του παράλληλου συνδυασμού των R_1 και της εσωτερικής αντίστασης του βολτομέτρου είναι

$$V_{1L} = \left(\frac{5\ \text{M}\Omega \| 10\ \text{M}\Omega}{(5\ \text{M}\Omega \| 10\ \text{M}\Omega) + 10\ \text{M}\Omega} \right)(27\ \text{V}) = 6.75\ \text{V}$$

Παρατηρούμε, ότι η μετρούμενη τάση είναι αισθητά μικρότερη από τα 9.0 V που θα περιμέναμε να μετρήσουμε. Το φαινόμενο επίδρασης φορτίου θα είναι

$$LE_1 = \frac{V_1 - V_{1L}}{V_1} \times 100\% = \frac{9.0\ \text{V} - 6.75\text{V}}{9.0\ \text{V}} \times 100\% = 25\%$$

Στο σχ. 2.23 φαίνεται το κύκλωμα με το βολτόμετρο συνδεμένο στα άκρα του αντιστάτη R_2.



Σχήμα 2.23

Η τάση στα άκρα του παράλληλου συνδυασμού των R_2 και της εσωτερικής αντίστασης του βολτομέτρου είναι

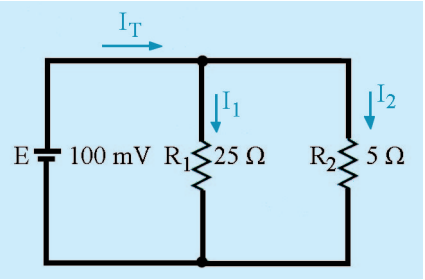
$$V_{2L} = \left(\frac{10\ \text{M}\Omega \| 10\ \text{M}\Omega}{(10\ \text{M}\Omega \| 10\ \text{M}\Omega) + 5\ \text{M}\Omega} \right)(27\ \text{V}) = 13.5\ \text{V}$$

Παρατηρούμε ξανά την αισθητή απόκλιση της μετρούμενης τάσης από τα 18.0 V που θα περιμέναμε να μετρήσουμε. Το φαινόμενο επίδρασης φορτίου θα είναι

$$LE_2 = \frac{V_2 - V_{2L}}{V_2} \times 100\% = \frac{18.0\ \text{V} - 13.5\text{V}}{18.0\ \text{V}} \times 100\% = 25\%$$

Όπως παρατηρούμε, οι μετρήσεις μας είναι προβληματικές, επειδή οι αντιστάσεις του κυκλώματος έχουν την ίδια τάξη μεγέθους με την εσωτερική αντίσταση του οργάνου μέτρησης.

Παράδειγμα 2.6. Για το κύκλωμα του σχ.2.24 να υπολογιστεί το φαινόμενο επίδρασης φορτίου, αν χρησιμοποιήσουμε ένα αμπερόμετρο με εσωτερική αντίσταση 5Ω, για να μετρήσουμε τα ρεύματα I_T, I_1 και I_2.



Σχήμα 2.24

Λύση

Θα υπολογίσουμε, στην αρχή, τις αναμενόμενες τιμές έντασης, χωρίς να πάρουμε δηλαδή υπόψη μας το όργανο μέτρησης. Χρησιμοποιώντας το νόμο του Ohm, υπολογίζουμε τα ρεύματα I_1 και I_2

$$I_1 = \frac{100\ \text{mV}}{25\ \Omega} = 4.0\ \text{mA}$$

$$I_2 = \frac{100\ \text{mV}}{5\ \Omega} = 20.0\ \text{mA}$$

Σύμφωνα με το νόμο των ρευμάτων του Kirchhoff θα είναι

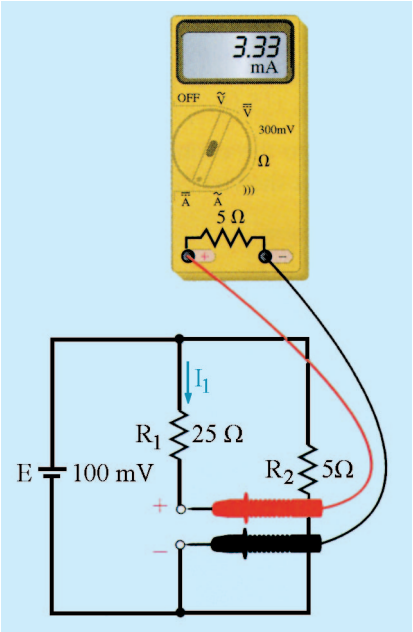
$$I_T = I_1 + I_2 = 4.0\ \text{mA} + 20.0\ \text{mA} = 24.0\ \text{mA}$$

Για να μετρήσουμε το ρεύμα I_1 συνδέουμε το αμπερόμετρο στο κλάδο του αντιστάτη R_1, όπως φαίνεται στο σχ.2.25. Το ρεύμα που διαρρέει το αμπερόμετρο είναι

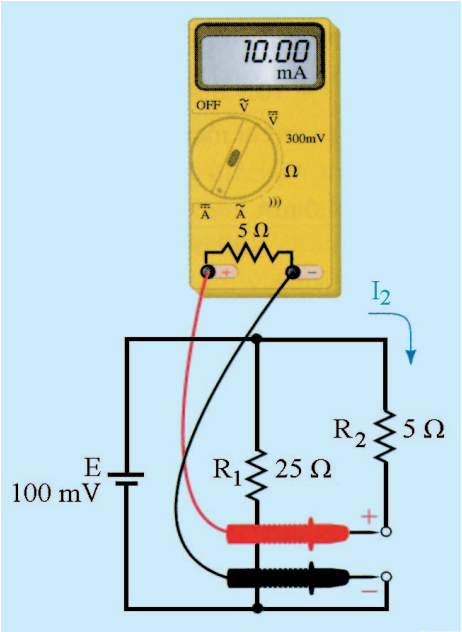
$$I_{1L} = \frac{100\ \text{mV}}{25\ \Omega + 5\ \Omega} = 3.33\ \text{mA}$$

Για να μετρήσουμε το ρεύμα I_2 συνδέουμε το αμπερόμετρο στο κλάδο του αντιστάτη R_2, όπως φαίνεται στο σχ.2.26. Η ένδειξη του αμπερομέτρου θα είναι

$$I_{2L} = \frac{100\ \text{mV}}{5\ \Omega + 5\ \Omega} = 10.0\ \text{mA}$$

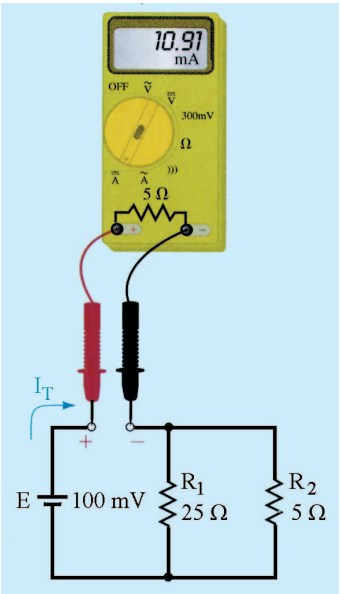


Σχήμα 2.25



Σχήμα 2.26

Εάν παρεμβάλλουμε το αμπερόμετρο στον κλάδο της πηγής, για να μετρήσουμε το ρεύμα I_T, τότε προκύπτει το κύκλωμα του σχ.2.27.



Σχήμα 2.27

Η ολική αντίσταση του κυκλώματος θα είναι

$$R_T = 5\Omega + 25\Omega \| 5\Omega = 9.17\Omega$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Ohm, υπολογίζουμε την ένδειξη του αμπερομέτρου, η οποία θα είναι

$$I_{TL} = \frac{E}{R_T} = \frac{100\ mV}{9.17\ \Omega} = 10.91\ mA$$

Το φαινόμενο επίδρασης φορτίου για την κάθε μέτρηση της έντασης του ρεύματος θα είναι

$$LE_1 = \frac{I_1 - I_{1L}}{I_1} \times 100\% = \frac{4.0mA - 3.33mA}{4.0mA} \times 100\% = 16.7\%$$

$$LE_2 = \frac{I_2 - I_{2L}}{I_2} \times 100\% = \frac{20.0mA - 10.0mA}{20.0mA} \times 100\% = 50\%$$

$$LE_T = \frac{I_T - I_{TL}}{I_T} \times 100\% = \frac{24.0mA - 10.91mA}{24.0mA} \times 100\% = 54.5\%$$

Παρατηρούμε ότι το φαινόμενο επίδρασης φορτίου είναι πιο έντονο στη μέτρηση του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_2, σε σχέση με τη μέτρηση του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_1, επειδή η τιμή της αντίστασης του R_2 είναι συγκρίσιμη με την τιμή της εσωτερικής αντίστασης του αμπερομέτρου.Παρατηρούμε επίσης, ότι οι μετρούμενες τιμές των εντάσεων των ρευμάτων δεν επαληθεύουν το νόμο των ρευμάτων του Kirchhoff, δηλαδή

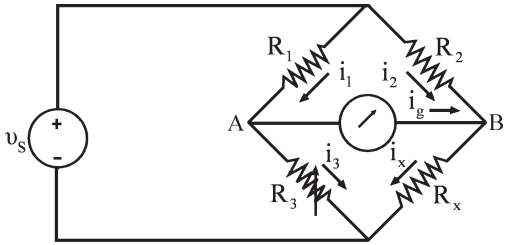
$$I_{TL} \neq I_{1L} + I_{2L}$$

γεγονός που μπορεί να μας οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα, αν αγνοήσουμε τη φυσική πραγματικότητα του οργάνου μέτρησης.

2.7. Γέφυρα Wheatstone

Το κύκλωμα της γέφυρας Wheatstone είναι ένα κύκλωμα, που προσφέρεται για ακριβείς μετρήσεις αντιστάσεων στην περιοχή από 1Ω μέχρι 1MΩ. Τα εμπορικά μοντέλα της γέφυρας Wheatstone εμφανίζουν ακρίβεια της τά-

ξης του ±0.1%. Το κύκλωμα της γέφυρας αποτελείται από τέσσερεις κλάδους με αντιστάτες, μια πηγή συνεχούς ρεύματος και ένα ανιχνευτή. Ο ανιχνευτής είναι γενικά ένα γαλβανόμετρο της περιοχής των 10^{-6}A. Η διάταξη του κυκλώματος φαίνεται στο σχ. 2.28, όπου οι αντιστάτες R_1, R_2, R_3 έχουν γνωστές τιμές, ενώ ο R_x είναι ο άγνωστος αντιστάτης.



Σχήμα 2.28. Κύκλωμα γέφυρας Wheatstone

Για να υπολογίσουμε την τιμή του R_x, ρυθμίζουμε το μεταβλητό αντιστάτη R_3, μέχρις ότου να μηδενιστεί η ένδειξη του γαλβανομέτρου (δε διέρχεται ρεύμα από τον κλάδο του γαλβανομέτρου). Η τιμή του άγνωστου αντιστάτη υπολογίζεται από την απλή έκφραση

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} \cdot R_3 \tag{2.31}$$

Η εξ. (2.31) προκύπτει απευθείας από την εφαρμογή των νόμων του Kirchhoff στο κύκλωμα της γέφυρας. Όταν το ρεύμα που διαρρέει το γαλβανόμετρο, μηδενιστεί, λέμε ότι η γέφυρα βρίσκεται σε **ισορροπία** και ο νόμος των ρευμάτων του Kirchhoff απαιτεί να είναι

$$i_1 = i_3 \tag{2.32}$$

και

$$i_2 = i_x \tag{2.33}$$

Εφόσον $i_g = 0$, οι κόμβοι Α και Β θα έχουν το ίδιο δυναμικό και από το νόμο των τάσεων του Kirchhoff προκύπτει

$$i_3 \cdot R_3 = i_x \cdot R_x \tag{2.34}$$

και

$$i_1 \cdot R_1 = i_2 \cdot R_2 \tag{2.35}$$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις εξ. (2.34) και (2.35) παίρνουμε

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_x}{R_2} \tag{2.36}$$

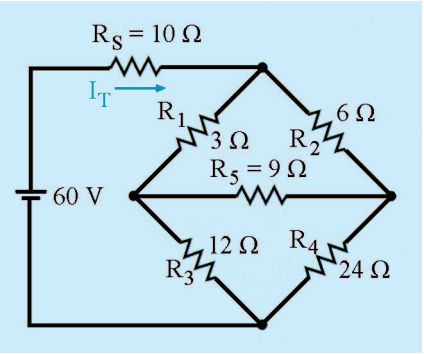
και λύνοντας ως προς R_x προκύπτει η προς απόδειξη σχέση (2.31).

Μετά την απόδειξη της σχέσης, που ισχύει, όταν η γέφυρα Wheatstone βρίσκεται σε ισορροπία, ας δούμε μερικά πρακτικά θέματα. Κατ' αρχήν, αν ο λόγος R_2/R_1 είναι ίσος με τη μονάδα, ο άγνωστος αντιστάτης R_x είναι ίσος με τον R_3. Στην περίπτωση αυτή ο αντιστάτης R_3 θα πρέπει να μεταβάλλεται σε περιοχή τιμών, που θα περιλαμβάνει και την τιμή του άγνωστου αντιστάτη R_x. Αν για παράδειγμα, η άγνωστη αντίσταση ήταν 1000Ω και η R_3 μπορούσε να μεταβάλλεται από 0 μέχρι 100Ω, η γέφυρα δε θα μπορούσε να ισορροπήσει ποτέ. Για να καλύψουμε λοιπόν μια ευρεία περιοχή τιμών άγνωστων αντιστατών, θα πρέπει να μπορούμε να μεταβάλλουμε το λόγο R_2/R_1.

Σε γέφυρες Wheatstone του εμπορίου οι αντιστάτες R_1 και R_2 παίρνουν τις τιμές 1, 10, 100 και 1000 Ω, ώστε ο λόγος να μπορεί να μεταβάλλεται από 0.001 μέχρι 1000, με βήματα, που το ένα είναι δεκαπλάσιο του προηγούμενου. Ο μεταβλητός αντιστάτης παίρνει συνήθως ακέραιες τιμές από 1 μέχρι 11000 Ω.

Αν και η εξ. (2.31) μας λέει ότι η R_x μπορεί να μεταβάλλεται από μηδέν μέχρι άπειρο, υπάρχουν φαινόμενα δεύτερης τάξης, που υπεισέρχονται στη λειτουργία της γέφυρας και περιορίζουν την περιοχή λειτουργίας της γέφυρας για τιμές του R_x από 1Ω μέχρι 1ΜΩ περίπου. Πολύ μικρές αντιστάσεις είναι δύσκολο να μετρηθούν εξαιτίας θερμοηλεκτρικών τάσεων, που αναπτύσσονται στις επαφές ανόμοιων μετάλλων ή εξαιτίας θερμότητας Joule. Πολύ μεγάλες αντιστάσεις είναι δύσκολο να μετρηθούν με ακρίβεια λόγω ρευμάτων διαρροής. Με άλλα λόγια, αν η R_x είναι πολύ μεγάλη, τότε το ρεύμα διαρροής στις ηλεκτρικές μονώσεις μπορεί να είναι συγκρίσιμο με τα ρεύματα στους κλάδους του κυκλώματος της γέφυρας.

Παράδειγμα 2.7. Να υπολογιστούν τα ρεύματα που διαρρέουν τους αντιστάτες R_1 και R_4 στο κύκλωμα του σχ.2.29.



Σχήμα 2.29

Λύση

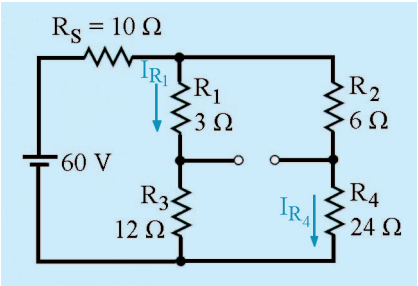
Για τη γέφυρα του κυκλώματος του σχ. 2.29 παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$$

δηλαδή η γέφυρα βρίσκεται σε ισορροπία. Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να απομακρύνουμε τον αντιστάτη R_5 και να τον αντικαταστήσουμε είτε με βραχυκύκλωμα (επειδή η τάση στα άκρα ενός βραχυκυκλώματος είναι μηδέν), είτε με ανοικτό κύκλωμα (επειδή το ρεύμα που διαρρέει ένα ανοικτό κύκλωμα είναι μηδενικό) και στη συνέχεια να επιλύσουμε το κύκλωμα.

Θα προχωρήσουμε στην επίλυση του κυκλώματος και με τις δύο μεθόδους, για να δείξουμε ότι τα αποτελέσματα είναι ακριβώς τα ίδια.

Μέθοδος 1: Αν αντικαταστήσουμε τον αντιστάτη R_5 με ανοικτό κύκλωμα, το κύκλωμα που προκύπτει φαίνεται στο σχ.2.30.



Σχήμα 2.30

Η ολική αντίσταση του κυκλώματος θα είναι

$$R_T = R_S + (R_1+R_3)\|(R_2+R_4)$$
$$= 10\Omega + (15\Omega)\|(30\Omega) = 20\Omega$$

Το ρεύμα που διαρρέει την πηγή θα είναι

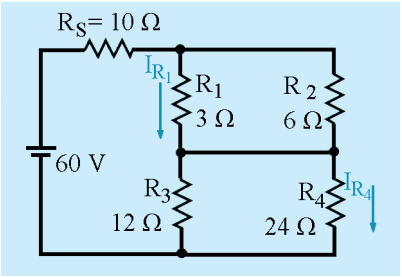
$$I_T = \frac{E}{R_T} = \frac{60V}{20\Omega} = 3.0A$$

Το ρεύμα σε κάθε κλάδο υπολογίζεται με τη χρήση των σχέσεων του διαιρέτη ρεύματος

$$I_{R1} = \frac{R_2+R_4}{(R_2+R_4)+(R_1+R_3)} \cdot I_T = 2.0A$$

$$I_{R4} = \frac{R_1+R_3}{(R_2+R_4)+(R_1+R_3)} \cdot I_T = 1.0A$$

Μέθοδος 2: Αν αντικαταστήσουμε τον αντιστάτη R_5 με ανοικτό κύκλωμα, το κύκλωμα που προκύπτει φαίνεται στο σχ. 2.31.



Σχήμα 2.31

Η ολική αντίσταση του κυκλώματος θα είναι

$$R_T = R_S + (R_1\|R_2) + (R_3\|R_4)$$
$$= 10\Omega + 2\Omega + 8\Omega = 20\Omega$$

Το αποτέλεσμα είναι ακριβώς το ίδιο με το αποτέλεσμα της μεθόδου 1. Επομένως, το ρεύμα που διαρρέει την πηγή παραμένει το ίδιο, $I_T = 3.0A$. Τα ρεύματα που διαρρέουν τους αντιστάτες R_1 και R_4 θα υπολογιστούν από τις σχέσεις του διαιρέτη ρεύματος

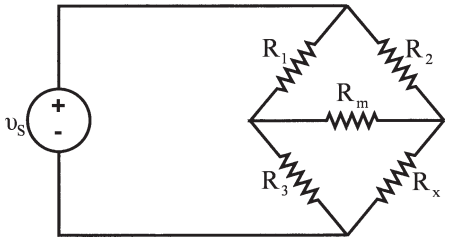
$$I_{R1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I_T = 2.0A$$

$$I_{R4} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \cdot I_T = 1.0A$$

Καταλήγουμε λοιπόν στα ίδια αποτελέσματα, όπως προηγουμένως.

2.8. Μετασχηματισμοί κυκλωμάτων Δ σε Υ (ή Π σε Τ ή τρίγωνο σε αστέρι)

Η διάταξη της γέφυρας του σχ. 2.28 εισάγει μια συνδεσμολογία αντιστατών, που χρειάζεται παραπέρα συζήτηση. Αν το γαλβανόμετρο αντικατασταθεί από την ισοδύναμη αντίσταση, R_m, που αντιπροσωπεύει την εσωτερική του αντίσταση, μπορούμε να ξανασχεδιάσουμε το κύκλωμα, όπως φαίνεται στο σχ. 2.32.



Σχήμα 2.32. Κύκλωμα γέφυρας

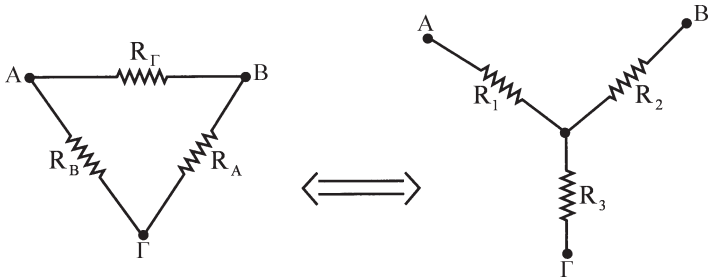
Το ενδιαφέρον στοιχείο του κυκλώματος αυτού είναι ότι η συνδεσμολογία των αντιστατών δε μπορεί να απλοποιηθεί και να αναχθεί σε μια μοναδική ισοδύναμη αντίσταση συνδεμένη στους ακροδέκτες της πηγής, αν περιοριστούμε στις απλές μετατροπές των σε σειρά ή παράλληλα συνδεμένων αντιστατών, που προαναφέραμε. Η συνδεσμολογία των αντιστατών στο κύκλωμα γέφυρας μπορεί να αναχθεί σε ένα μοναδικό αντιστάτη μέσω των μετασχηματισμών Δ σε Υ.

Οι αντιστάτες R_1, R_2 και R_m ή R_3, R_m και R_x στο κύκλωμα του σχ. 2.32 αναφέρονται ως συνδεσμολογία Δέλτα (ή και τρίγωνο). Επίσης αναφέρονται και ως συνδεσμολογία Π επειδή το Δ μπορεί να μετασχηματιστεί σε Π χωρίς να διαταραχτεί η ηλεκτρική ισοδυναμία της συνδεσμολογίας, όπως φαί-

νεται στο σχ. 2.33.

Σχήμα 2.33

Ο μετασχηματισμός Δ σε Υ σημαίνει ότι μια συνδεσμολογία της μορφής Δ μπορεί να αντικατασταθεί από μία συνδεσμολογία της μορφής Υ (σχ. 2.34), έτσι ώστε να μη διαταραχτεί η ηλεκτρική συμπεριφορά του γενικότερου κυκλώματος, του οποίου αποτελούν ένα τμήμα.



Σχήμα 2.34

Τα δύο κυκλώματα είναι ισοδύναμα μόνο για τάσεις και ρεύματα εξωτερικά ως προς τις συνδέσεις Δ και Υ. Στο εσωτερικό των δύο συνδεσμολογιών οι τάσεις και τα ρεύματα διαφέρουν. Για τη μετατροπή Δ σε Υ ισχύουν οι σχέσεις:

$$R_1 = \frac{R_B R_Γ}{R_A + R_B + R_Γ} \tag{2.37}$$

$$R_2 = \frac{R_Γ R_A}{R_A + R_B + R_Γ} \tag{2.38}$$

$$R_3 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_Γ} \tag{2.39}$$

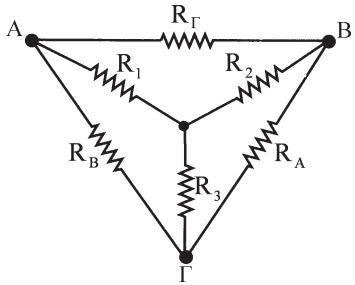
Για την αντίστροφη μετατροπή, δηλαδή από Υ σε Δ, ισχύουν οι σχέσεις

$$R_A = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1} \tag{2.40}$$

$$R_B = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2} \tag{2.41}$$

$$R_\Gamma = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3} \tag{2.42}$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι στους τύπους της μετατροπής Δ σε Υ οι παρονομαστές είναι ίδιοι, και ίσοι με το άθροισμα των τριών αντιστάσεων, ενώ στους τύπους μετατροπής Υ σε Δ είναι ίδιοι οι αριθμητές και ίσοι προς το άθροισμα των γινομένων των αντιστάσεων ανά δύο. Αν σχεδιάσουμε το κύκλωμα τύπου Υ μέσα στο κύκλωμα τύπου Δ, τότε μπορεί να προκύψει ένας καλός και απλός μνημονικός κανόνας, για να θυμόμαστε τους αριθμητές των εξ. (2.37) - (2.39) και τους παρονομαστές των εξ. (2.40) - (2.42).



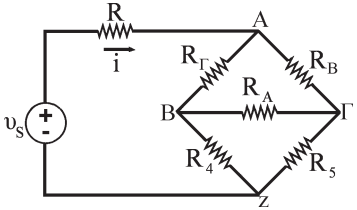
Σχήμα 2.35

Για κάθε αντιστάτη του κυκλώματος τύπου Υ στις εξ. (2.37) - (2.39), οι δύο αντιστάτες, που το γινόμενο τους δίνει τον αριθμητή, είναι οι προσκείμενοι του στο κύκλωμα Δ. Στις εξ. (2.40) - (2.42) ο αντιστάτης του κυκλώματος Υ, που είναι στον παρονομαστή, είναι εκείνος, που βρίσκεται απέναντι από τον αντιστάτη του κυκλώματος Δ, που υπολογίζουμε.

Παράδειγμα 2.8. Να βρεθεί το ρεύμα i και η ισχύς που παρέχει η πηγή στο κύκλωμα του σχ. 2.36.

Δίνονται : $\upsilon_S = 40V$, $R = 5\Omega$, $R_A = 25\Omega$, $R_B = 125\Omega$, $R_\Gamma = 100\Omega$,

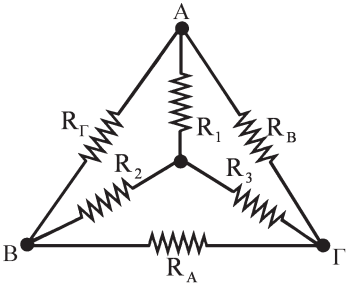
$R_4 = 40\Omega$ και $R_5 = 37.5\Omega$.



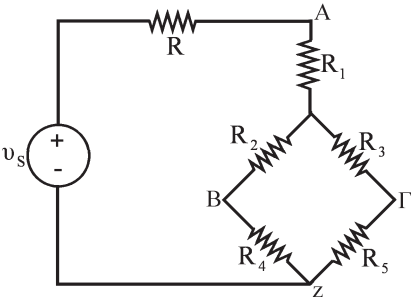
Σχήμα 2.36

Λύση

Εφόσον ενδιαφερόμαστε μόνο για το ρεύμα i και την ισχύ, που παρέχει η πηγή, το μόνο που χρειάζεται να υπολογίσουμε είναι η ισοδύναμη αντίσταση, που συνδέεται στους ακροδέκτες της πηγής. Η ισοδύναμη αυτή αντίσταση μπορεί να υπολογιστεί εύκολα, αφού αντικαταστήσουμε είτε το πάνω κύκλωμα Δ (R_A , R_B , $R_Γ$), είτε το κάτω κύκλωμα Δ (R_A , R_4 , R_5) με το ισοδύναμο του Y. Ας αντικαταστήσουμε το επάνω. Οι τρεις αντιστάτες του κυκλώματος Y ορίζονται στο σχ. 2.37 και υπολογίζονται από τις εξ. (2.37) - (2.39).



Σχήμα 2.37



Σχήμα 2.38

$$R_1 = \frac{R_B R_Γ}{R_A + R_B + R_Γ} = \frac{(125)(100)}{25+125+100} = \frac{12500}{250} = 50Ω$$

$$R_2 = \frac{R_A R_Γ}{R_A + R_B + R_Γ} = \frac{(25)(100)}{250} = 10Ω$$

$$R_3 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_Γ} = \frac{(25)(125)}{250} = 12.5Ω$$

Όταν γίνει η αντικατάσταση των ισοδύναμων κυκλωμάτων προκύπτει το σχ. 2.38, όπου μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την ολική αντίσταση του κυκλώματος με διαδοχικές απλοποιήσεις αντικαθιστώντας τις σε σειρά ή πα-

ράλληλα συνδεμένες αντιστάσεις με τις ισοδύναμές τους. Έτσι

$$R_{24} = R_2 + R_4 = 10 + 40 = 50\Omega$$

$$R_{35} = R_3 + R_5 = 12.5 + 37.5 = 50\Omega$$

ενώ

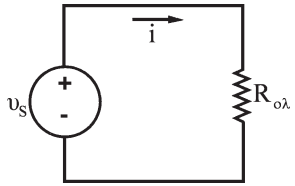
$$R_{2345} = \frac{R_{24} \cdot R_{35}}{R_{24} + R_{35}} = \frac{(50)(50)}{100} = 25\Omega$$

και $$R_{o\lambda} = R + R_1 + R_{2345} = 5 + 50 + 25 = 80\Omega$$

Έτσι το αρχικό κύκλωμα παίρνει τη μορφή που φαίνεται στο σχ. 2.39

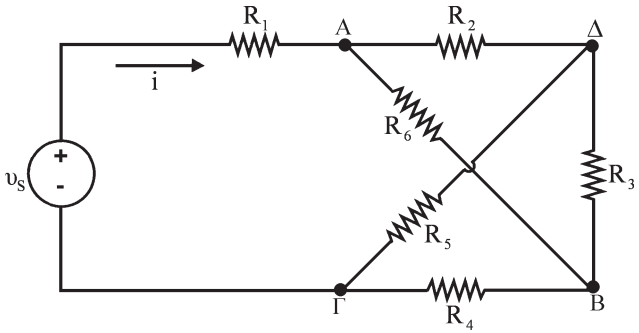
θα είναι $$i = \frac{\upsilon_S}{R_{o\lambda}} = \frac{40V}{80\Omega} = 0.5A$$

και $$p = \upsilon_S \cdot i = (40V)(0.5A) = 20W$$



Σχήμα 2.39

Παράδειγμα 2.9. Για το κύκλωμα τύπου - πλέγματος του σχ.2.40 να βρεθεί η τάση υ_S της πηγής για την οποία θα έχουμε, i = 3A.

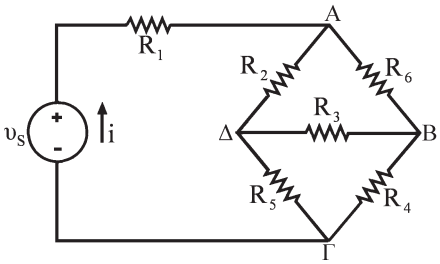


Σχήμα 2.40

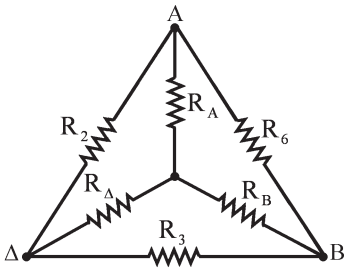
Δίνονται: $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, $R_3 = 50\Omega$, $R_4 = 40\Omega$, $R_5 = 60\Omega$, $R_6 = 60\Omega$.

Λύση

Το κύκλωμα τύπου - πλέγματος του σχ. 2.40 ξανασχεδιάζεται στο σχ. 2.41 σαν κύκλωμα γέφυρας, ώστε να εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό Δ σε Υ.



Σχήμα 2.41



Σχήμα 2.42

Αντικαθιστώντας το βρόχο ΑΔΒΑ με το ισοδύναμο κύκλωμα Υ, οι αντιστάτες του οποίου ορίζονται στο σχ. 2.42 και είναι

$$R_A = \frac{R_2 R_6}{R_2 + R_3 + R_6} = \frac{40 \cdot 60}{40 + 50 + 60} = 16\Omega$$

$$R_B = \frac{R_3 R_6}{R_2 + R_3 + R_6} = \frac{50 \cdot 60}{150} = 20\Omega$$

$$R_\Delta = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3 + R_6} = \frac{40 \cdot 50}{150} = 40/3\ \Omega$$

Έτσι προκύπτει το κύκλωμα του σχ. 2.43 στο οποίο οι αντιστάτες R_Δ και R_5 είναι συνδεμένοι σε σειρά, όπως και οι R_5 και R_6.
Στο ισοδύναμο κύκλωμα του σχ. 2.44 είναι

$$R_{1A} = R_1 + R_A = 10 + 16 = 26\Omega$$

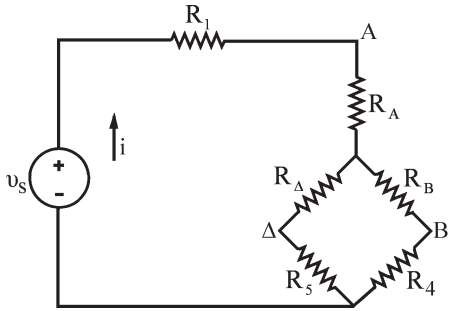
$$R_{5\Delta} = R_5 + R_\Delta = 60 + 40/3 = 220/3\ \Omega$$

και $$R_{4B} = R_4 + R_B = 40 + 20 = 60\Omega$$

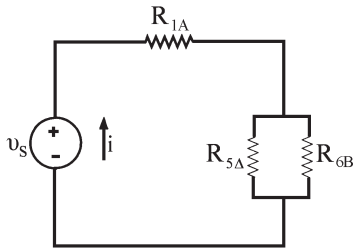
Επίσης

$$R_{5\Delta 4B} = \frac{R_{5\Delta} \cdot R_{4B}}{R_{5\Delta} + R_{4B}} = 33\ \Omega, \quad \text{ενώ} \quad R_{o\lambda} = R_{1A} + R_{5\Delta 4B} = 59\ \Omega$$

Τελικά, $\upsilon_S = iR_{o\lambda} = (3A)(59\Omega) = 177\,V$

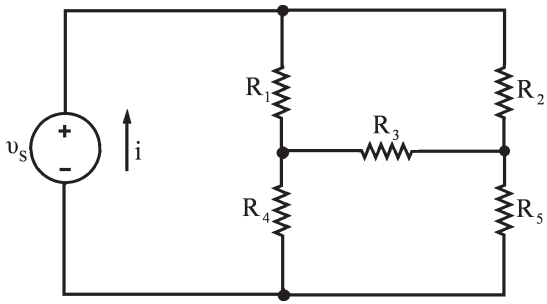


Σχήμα 2.43



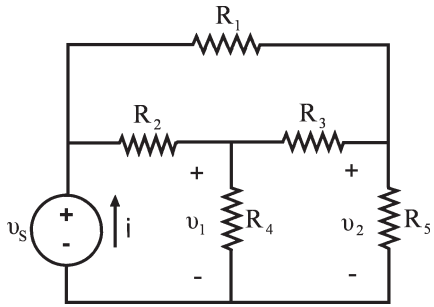
Σχήμα 2.44

Άσκηση εφαρμογής 2.3. Να υπολογιστεί η τιμή του ρεύματος i στο κύκλωμα του σχ. 2.45. Δίνονται $\upsilon_S = 100V$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 10\Omega$, $R_4 = 3\Omega$, $R_5 = 3\Omega$.



Σχήμα 2.45

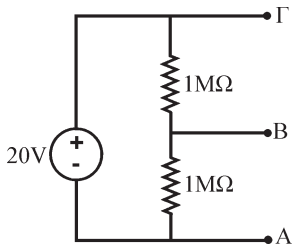
Άσκηση εφαρμογής 2.4. Στο κύκλωμα του σχ. 2.46 να βρεθούν: **α)** το ρεύμα i, χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό Δ σε Y, **β)** οι τάσεις υ_1 και υ_2 *(υπόδειξη: ο υπολογισμός των τάσεων να γίνει στο κύκλωμα, που προκύπτει μετά τον μετασχηματισμό).* Δίνονται: $\upsilon_S = 24V$, $R_1 = 15\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $R_3 = 10\Omega$, $R_4 = 40\Omega$, $R_5 = 50\Omega$.



Σχήμα 2.46

2.9. Πειραματικές εφαρμογές

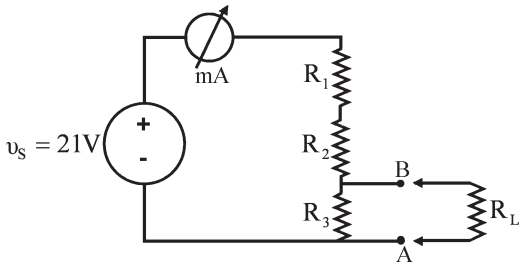
2.9.1. Στο σχ. 2.47 του διαιρέτη τάσης να μετρηθούν οι τάσεις στα σημεία ΑΒ και ΒΓ με τα υπάρχοντα βολτόμετρα σε όλες τις κλίμακες και να δικαιολογηθούν οι τυχόν αποκλίσεις από τους θεωρητικούς υπολογισμούς.



Σχήμα 2.47

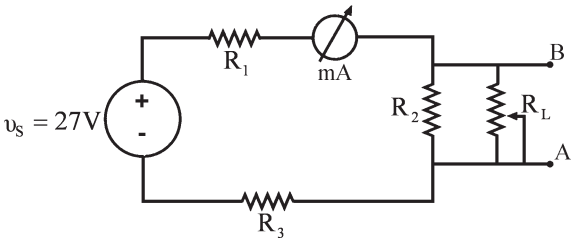
2.9.2. Να κατασκευάσετε το κύκλωμα του διαιρέτη τάσης του σχ. 2.48 με αντιστάσεις $R_1 = R_2 = 1k\Omega$, $R_3 = 1.5k\Omega$ και τάση πηγής $\upsilon_S = 21Vdc$. Για ποια τιμή της αντίστασης φορτίου ο διαιρέτης είναι σταθερός με απόκλιση <1%;

Μετρείστε τις τάσεις στα άκρα των αντιστατών και το ρεύμα που τους διαρρέει για τιμές αντίστασης φορτίου **α)** $R_L = \infty$, **β)** $R_L = 470k\Omega$, **γ)** $R_L = 22k\Omega$, και **δ)** $R_L = 1.5k\Omega$. Για κάθε τιμή της R_L να υπολογίσετε το φαινόμενο επίδρασης φορτίου, LE.



Σχήμα 2.48

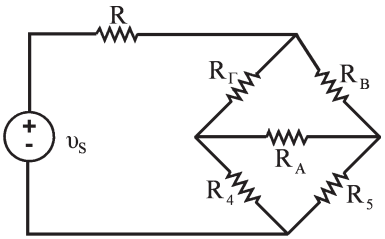
2.9.3. Να κατασκευάσετε το κύκλωμα του διαιρέτη τάσης του σχ. 2.49 με αντιστάσεις $R_1 = 2.5k\Omega$, $R_2 = 1k\Omega$, $R_3 = 10k\Omega$ και τάση πηγής $\upsilon_S = 27$ Vdc.



Σχήμα 2.49

Για αντίσταση φορτίου να χρησιμοποιήσετε ένα ποτενσιόμετρο 10 kΩ. Να υπολογίσετε και να μετρήσετε τις τάσεις στα άκρα AB για τιμές φορτίου **α)** $R_L = 1k\Omega$, **β)** $R_L = 5k\Omega$, **γ)** $R_L = 10k\Omega$. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το φαινόμενο επίδρασης φορτίου στο διαιρέτη για τις τιμές αυτές.

2.9.4. Να κατασκευάσετε το κύκλωμα του σχ. 2.50 στο οποίο είναι $\upsilon_S = 20$ Vdc, $R = 1k\Omega$, $R_A = 270\Omega$, $R_B = 3.3k\Omega$, $R_\Gamma = 1k\Omega$, $R_4 = 1.5k\Omega$ και $R_5 = 3.3k\Omega$. Ωμομετρείστε τους αντιστάτες και ρυθμίστε την τάση της πηγής, αφού τη συνδέσετε στο κύκλωμα.



Σχήμα 2.50

Να υπολογιστούν τα ρεύματα που διαρρέουν τους αντιστάτες:

i) Έμμεσα (μετρώντας την τάση υ_{R_j} στα άκρα κάθε αντιστάτη R_j με το ηλεκτρονικό πολύμετρο και χρησιμοποιώντας το νόμο του Ohm).

ii) Άμεσα (παρεμβάλλοντας το ηλεκτρονικό ή το αναλογικό πολύμετρο ως αμπερόμετρο στον αντίστοιχο κλάδο).

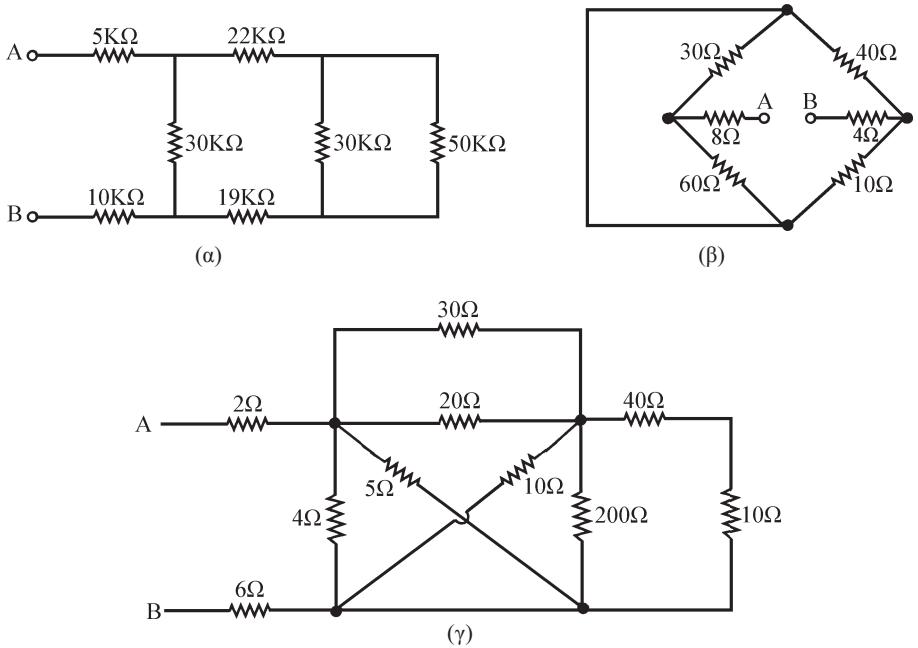
iii) Να γίνει **θεωρητικός** υπολογισμός.

iv) Να συγκριθούν και να σχολιαστούν τα αποτελέσματα.

v) Να ελεγχθεί η ισχύς των νόμων του Kirchhoff στους κόμβους και στους βρόχους του κυκλώματος. Να υπολογιστεί το φαινόμενο επίδρασης φορτίου για κάθε μέτρηση.

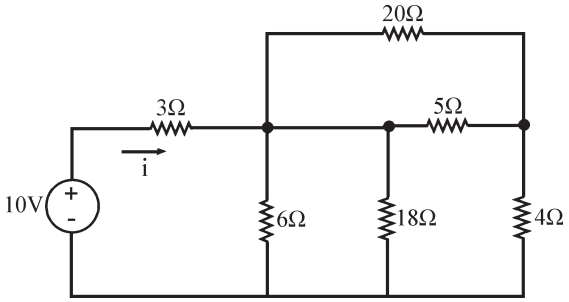
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

2.1. Να βρεθεί η ισοδύναμη αντίσταση ως προς τους ακροδέκτες A, B για κάθε ένα από τα κυκλώματα του σχ. 2.51



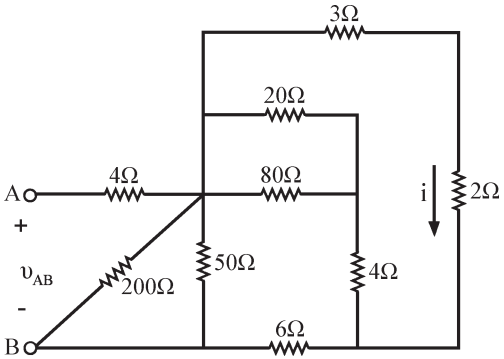
Σχήμα 2.51

2.2. Στο κύκλωμα του σχ. 2.52 να υπολογιστούν α) το ρεύμα i και β) η ισχύς που απορροφάται από τον αντιστάτη των 4 Ω.



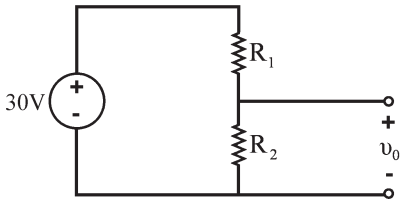
Σχήμα 2.52

2.3. Στο κύκλωμα του σχ. 2.53, το ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη των 2Ω έχει τιμή i = 8A. Να βρεθούν **α)** η τάση υ_{AB} , **β)** η ισχύς που απορροφάται από τον αντιστάτη των 20Ω, **γ)** το επί τοις εκατό ποσοστό της ισχύος, που απορροφά ο αντιστάτης των 2Ω, από τη συνολική, η οποία προσφέρεται στην είσοδο A, B του κυκλώματος.

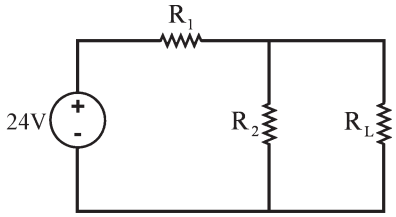


Σχήμα 2.53

2.4. Στο κύκλωμα του διαιρέτη τάσης, που φαίνεται στο σχ. 2.54 να υπολογιστούν: **α)** η τάση εξόδου υ_0 , όταν ο διαιρέτης λειτουργεί χωρίς φορτίο, **β)** η ισχύς, που αποτίθεται στους αντιστάτες R_1 =1000 Ω και R_2 = 500Ω. **γ)** Αν διαθέτουμε αντιστάτες, που αντέχουν ισχύ μέχρι 0.25W, να προσδιοριστούν οι τιμές των R_1 και R_2 θεωρώντας, ότι ο λόγος των τιμών τους διατηρεί την προηγούμενη τιμή του.



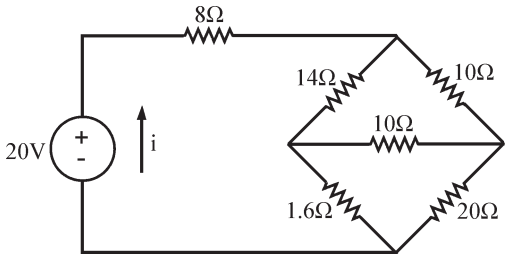
Σχήμα 2.54



Σχήμα 2.55

2.5. Στο κύκλωμα του διαιρέτη τάσης, που φαίνεται στο σχ. 2.55, η τάση εξόδου, όταν ο διαιρέτης λειτουργεί χωρίς φορτίο είναι 6V. Όταν ο διαιρέτης λειτουργεί υπό φορτίο, η τιμή της τάσης εξόδου δεν πρέπει να είναι μικρότερη από 5V. Αν η μικρότερη τιμή της αντίστασης φορτίου μπορεί να είναι ίση με 3kΩ να υπολογιστούν **α)** οι αριθμητικές τιμές των R_1 και R_2, **β)** η μέγιστη ισχύς, που απορροφάται από τον R_1.

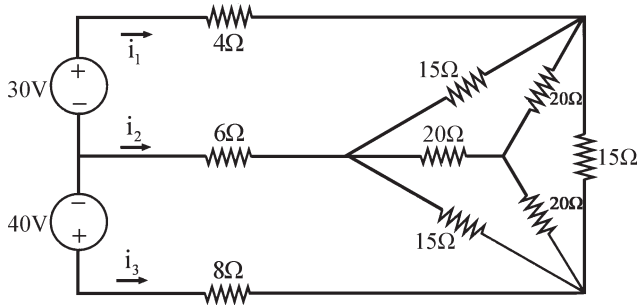
2.6. Στο κύκλωμα του σχ. 2.56 να υπολογιστεί το ρεύμα i χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό Δ σε Y.



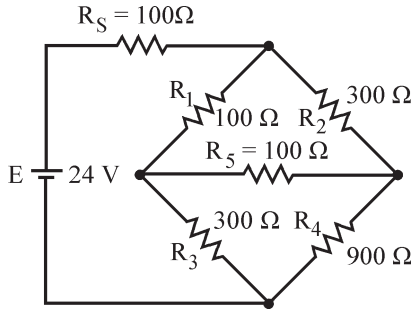
Σχήμα 2.56

2.7. Στο κύκλωμα του σχ. 2.57 να υπολογιστούν τα ρεύματα i_1, i_2, και i_3 χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό Δ σε Y.

2.8. Στο κύκλωμα γέφυρας του σχ.2.58 να υπολογιστούν οι εντάσεις των ρευμάτων που διαρρέουν τους αντιστάτες του.

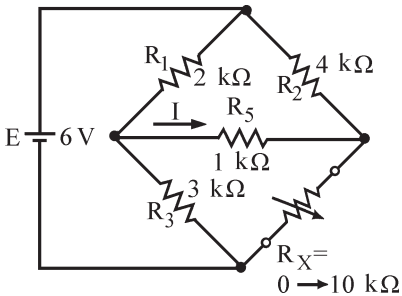


Σχήμα 2.57



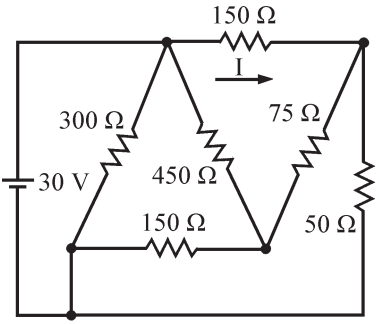
Σχήμα 2.58

2.9. Στο κύκλωμα γέφυρας του σχ.2.59, **α**) να προσδιοριστεί η τιμή της αντίστασης του R_x, ώστε η γέφυρα να βρίσκεται σε ισορροπία, και **β**) να υπολογιστεί το ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη R_5, όταν $R_x = 0$ και, όταν $R_x = 10k\Omega$.



Σχήμα 2.59

2.10. Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς Δ σε Υ ή Υ σε Δ, να υπολογίσετε το ρεύμα I στο κύκλωμα του σχ.2.60.



Σχήμα 2.60