ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

- Εισαγωγή στη μέθοδο των κόμβων
- Γενίκευση της μεθόδου των κόμβων
- Η μέθοδος των τάσεων των κόμβων στο εναλλασσόμενο ρεύμα
- Εισαγωγή στη μέθοδο των βρόχων
- Γενίκευση της μεθόδου των βρόχων
- Η μέθοδος των ρευμάτων βρόχων στο εναλλασσόμενο ρεύμα

Ι. Κυπριανίδης

5. ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

5.1. Εισαγωγή

Πριν αρχίσουμε να αναπτύσσουμε τις μεθόδους ανάλυσης των κυκλωμάτων είναι χρήσιμο να δώσουμε κάποιους ορισμούς γνωστών μάλλον εννοιών.

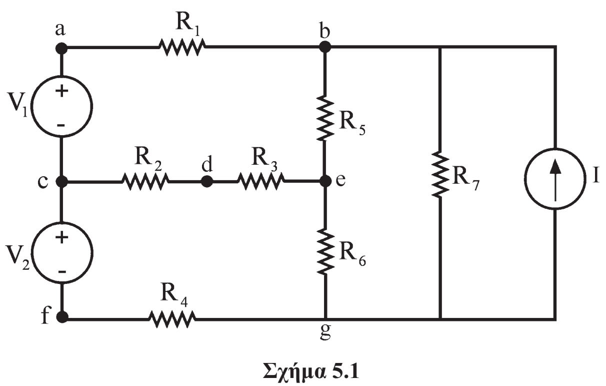
"Κόμβος": είναι ένα σημείο του κυκλώματος, όπου ενώνονται δύο ή περισσότερα στοιχεία.

"Διαδρομή": σχηματίζεται από ένα σύνολο διαδοχικών στοιχείων του κυκλώματος έτσι, ώστε να μην περνάμε από κάποιον κόμβο δεύτερη φορά.

"Κλειστή διαδρομή": σχηματίζεται, όταν ξεκινώντας από ένα συγκεκριμένο κόμβο και περνώντας από ένα σύνολο διαδοχικά συνδεμένων στοιχείων του κυκλώματος, επιστρέφουμε στον κόμβο εκκίνησης χωρίς να περάσουμε δεύτερη φορά από κάποιον ενδιάμεσο κόμβο.

"Κλάδος": είναι η διαδρομή, η οποία συνδέει δύο κόμβους.

"Βρόχος": είναι ένας ειδικός τύπος κλειστής διαδρομής, που δεν περιέχει στο εσωτερικό του κάποια άλλη κλειστή διαδρομή.



Σχήμα 5.1

Στο κύκλωμα του σχήματος 5.1 υπάρχουν

i) επτά κόμβοι (a, b, c, d, e, f, g)

ii) δέκα κλάδοι [ac, ab, cd, de, be , cf, fg, eg, bg (R7), bg (I)]

iii) τέσσερεις βρόχοι

iv) παράδειγμα κλειστής διαδρομής: abegfca

v) παράδειγμα διαδρομής: abed ή egfc

Στη διάρκεια της μελέτης μας θα διαπιστώσουμε ότι είναι πιο βολικό να θεωρούμε εκείνους τους κόμβους, όπου ενώνονται τρία ή περισσότερα στοιχεία. Αυτούς τους κόμβους θα τους ονομάσουμε “ουσιώδεις κόμβους” (essential nodes). Η διαδρομή που συνδέει δύο ουσιώδεις κόμβους θα ονομάζεται “ουσιώδης κλάδος” (essential branch). Στο κύκλωμα του σχ. 5.1 υπάρχουν

i) τέσσερεις ουσιώδεις κόμβοι (b, c, e, g)

ii) επτά ουσιώδεις κλάδοι (V_1- R_1, R_2 - R_3, V_2 - R_4, R_5, R_6, R_7, I)

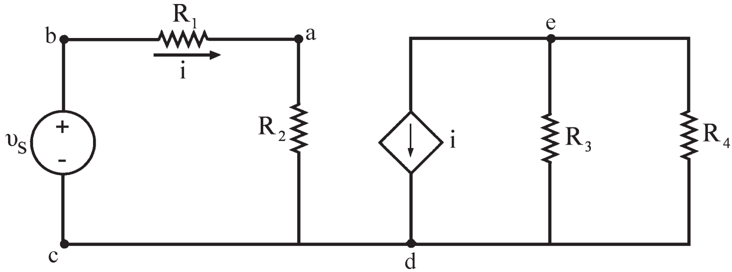
Σημειώνουμε, ότι γενικά ο αριθμός των ουσιωδών κόμβων θα είναι μικρότερος ή ίσος προς τον αριθμό των κόμβων και ο αριθμός των ουσιωδών κλάδων θα είναι μικρότερος ή ίσος προς τον αριθμό των κλάδων.

Ο λόγος, που ενδιαφερόμαστε για τον αριθμό των κόμβων, των κλάδων και των βρόχων ενός κυκλώματος, είναι ότι αυτοί οι αριθμοί καθορίζουν τον απαραίτητο αριθμό εξισώσεων, που χρειάζονται για την επίλυση του κυκλώματος. Η εξήγηση είναι η ακόλουθη.

Ο αριθμός των άγνωστων ρευμάτων του κυκλώματος θα είναι ίσος με τον αριθμό των κλάδων στους οποίους το ρεύμα δεν είναι γνωστό. Έστω κ_b αυτός ο αριθμός. Για παράδειγμα στο κύκλωμα του σχ. 5.1 υπάρχουν εννέα κλάδοι, στους οποίους το ρεύμα είναι άγνωστο. Από τη στοιχειώδη άλγεβρα γνωρίζουμε ότι θα χρειαστούμε κ_b ανεξάρτητες εξισώσεις για να επιλύσουμε το κύκλωμα με τα κ_b άγνωστα ρεύματα. Αν κ_n είναι ο αριθμός των κόμβων του κυκλώματος, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε (κ_n - 1) ανεξάρτητες εξισώσεις εφαρμόζοντας το νόμο των ρευμάτων του Kirchhoff σε οποιοδήποτε σύνολο (κ_n-1) κόμβων.(Η εφαρμογή του νόμου των ρευμάτων στον κ_n-οστό κόμβο δεν θα δημιουργήσει μια ανεξάρτητη εξίσωση, επειδή η εξίσωση αυτή μπορεί να προκύψει από τις προηγούμενες (κ_n-1) εξισώσεις).

Γνωρίζοντας ότι χρειαζόμαστε κ_b εξισώσεις για την επίλυση του κυκλώματος και ότι οι (κ_n-1) από αυτές τις εξισώσεις σχηματίζονται από την εφαρμογή του νόμου των ρευμάτων του Kirchhoff προκύπτει ότι οι υπόλοιπες [(κ_b - (κ_n-1)] εξισώσεις θα προκύψουν από την εφαρμογή του νόμου των τάσεων του Kirchhoff σε ανεξάρτητες κλειστές διαδρομές ή βρόχους.

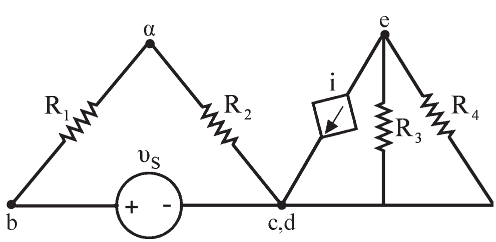
Βλέπουμε λοιπόν ότι μετρώντας τον αριθμό των κλάδων και των κόμβων μπορούμε να υπολογίσουμε τον απαραίτητο αριθμό εξισώσεων για την επίλυση του κυκλώματος. Τα προηγούμενα συμπεράσματα εξακολουθούν να ισχύουν, αν θεωρήσουμε τους ουσιώδεις κόμβους και τους ουσιώδεις κλάδους. Έτσι αν κ_{no} είναι ο αριθμός των ουσιωδών κόμβων και κ_{bo} αριθμός των ουσιωδών κλάδων, όπου το ρεύμα είναι άγνωστο τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το νόμο των ρευμάτων του Kirchhoff σε (κ_{no}-1) κόμβους και το νόμο των τάσεων του Kirchhoff σε [(κ_{bo} - (κ_{no}-1)] κλειστές διαδρομές ή βρόχους. Θα πρέπει εδώ να τονίσουμε ότι οι προηγούμενοι αριθμοί εξισώσεων ισχύουν για "συνδεμένα" κυκλώματα όχι όμως και για "μη συνδεμένα" κυκλώματα, όπως αυτό του σχ. 5.2, που αποτελείται από δύο τμήματα μη συνδεμένα μεταξύ τους.



Σχήμα 5.2

Αν ένα τέτοιο κύκλωμα έχει κ_n κόμβους και κ_b κλάδους, και αποτελείται από κ_s τμήματα, τότε ο νόμος των ρευμάτων θα εφαρμοστεί κ_n - κ_s φορές και ο νόμος των τάσεων [(κ_b - (κ_n - κ_s)] φορές.

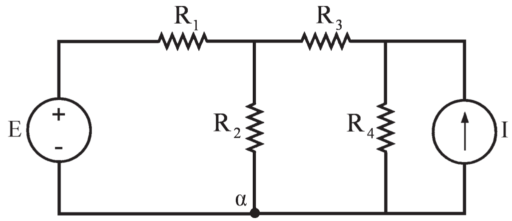
Παρατηρούμε επίσης ότι τα δύο χωριστά τμήματα του κυκλώματος του σχ. 5.2 συνδέονται με ένα απλό αγωγό. Η σύνδεση αυτή έχει ως αποτέλεσμα οι δύο κόμβοι να αποτελέσουν ένα κόμβο. Επιπλέον ο απλός αυτός αγωγός σύνδεσης δεν διαρρέεται από ρεύμα μια που δεν υπάρχει δεύτερος αγωγός επιστροφής μεταξύ των δύο τμημάτων. Έτσι το μη συνδεμένο κύκλωμα του σχ. 5.2 μπορεί να μεταπέσει σε ένα συνδεμένο κύκλωμα (σχ. 5.3) με τέσσερεις κόμβους (a, b, c, d).



Σχήμα 5.3

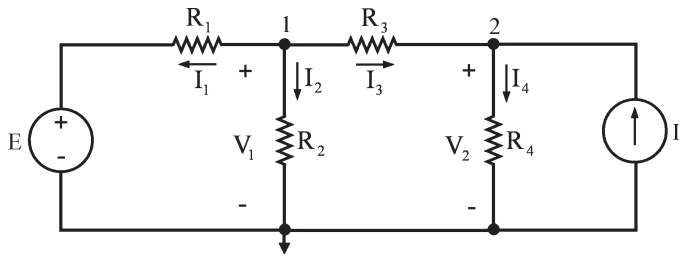
5.2. Εισαγωγή στη μέθοδο των κόμβων

Στην περιγραφή της μεθόδους αυτής θα χρησιμοποιήσουμε τους ουσιώδεις κόμβους του κυκλώματος του σχήματος 5.4, στο οποίο $E = 10$ V, $R_1 = 1Ω$, $R_2 = 5Ω$, $R_3 = 2Ω$, $R_4 = 10Ω$ και $I = 2A$.



Σχήμα 5.4

Παρατηρούμε ότι το κύκλωμα έχει τρεις ουσιώδεις κόμβους ($κ_{no} = 3$), επομένως χρειαζόμαστε $κ_{no}$-1 = 2 εξισώσεις κόμβων για την περιγραφή του κυκλώματος. Το επόμενο βήμα της μελέτης μας είναι η επιλογή ενός από τους τρεις ουσιώδεις κόμβους, ως κόμβου αναφοράς. Αν και θεωρητικά η επιλογή είναι τυχαία, από πρακτική άποψη υπάρχει συχνά μια εμφανής επιλογή για τον κόμβο αναφοράς. Για παράδειγμα, ο κόμβος, στον οποίο καταλήγουν οι περισσότεροι κλάδοι του κυκλώματος, είναι συνήθως μια καλή επιλογή. Έτσι στο κύκλωμα του σχ. 5.4 θα χρησιμοποιούμε ως κόμβο αναφοράς τον κόμβο α και θα τον σημειώσουμε με το σύμβολο $\downarrow$, όπως φαίνεται στο σχ. 5.5.



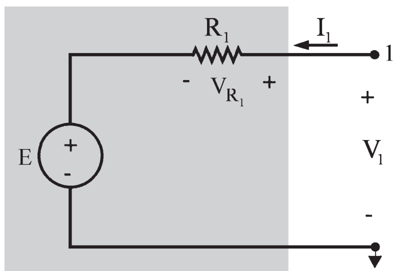
Σχήμα 5.5

Μετά την επιλογή του κόμβου αναφοράς τα δυναμικά των υπόλοιπων κόμβων ορίζονται μονοσήμαντα και συμβολίζονται με V_1 και V_2 για τους κόμβους 1 και 2 αντίστοιχα (σχ. 5.5).

Είμαστε λοιπόν έτοιμοι να γράψουμε τις εξισώσεις των κόμβων. Μια εξίσωση κόμβου δημιουργείται γράφοντας τα ρεύματα, που διαρρέουν κάθε κλάδο του κυκλώματος, ο οποίος συνδέεται με τον υπό θεώρηση κόμβο, και στη συνέχεια αθροίζοντας τα ρεύματα αυτά και εξισώνοντας τα με μηδέν σύμφωνα με τον νόμο των ρευμάτων του Kirchhoff. Έτσι για τον κόμβο 1, το ρεύμα, που απομακρύνεται από αυτόν διαμέσου του αντιστάτη R_1, θα είναι ίσο με την πτώση τάσης στα άκρα του αντιστάτη διαιρεμένης με την τιμή της αντίστασης R_1 (νόμος του Ohm). Η πτώση τάσης στα άκρα της R_1 θα είναι (V_1 - E). Επομένως το ρεύμα στον αντιστάτη R_1 θα είναι

$$I_1 = \frac{V_1 - E}{R_1} \tag{5.1}$$

Στο σχήμα 5.6 έχουμε ξανασχεδιάσει τον υπό θεώρηση κλάδο σημειώνοντας όλα τα απαραίτητα στοιχεία.



Σχήμα 5.6

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία προκύπτουν τα άγνωστα ρεύματα κάθε κλάδου. Έτσι το ρεύμα, που απομακρύνεται από τον κόμβο 1 μέσω της R_2, θα είναι:

$$I_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{V_1}{5}$$

και το ρεύμα, που απομακρύνεται από τον κόμβο 1 μέσω της R_3 θα είναι:

$$I_3 = \frac{V_1 - V_2}{R_3} = \frac{V_1 - V_2}{2}$$

Το άθροισμα των τριών ρευμάτων, που απομακρύνονται από τον κόμβο 1, θα πρέπει να είναι ίσο με μηδέν.

$$V_1 - 10 + \frac{V_1}{5} + \frac{V_1 - V_2}{2} = 0 \tag{5.2α}$$

Η εξίσωση του κόμβου 2 θα είναι

$$\frac{V_2 - V_1}{R_3} + \frac{V_2}{R_4} - I = 0$$

ή

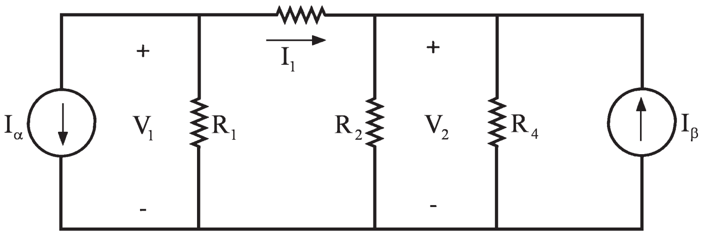
$$\frac{V_2 - V_1}{2} + \frac{V_2}{10} - 2 = 0 \qquad (5.2\beta)$$

Οι εξισώσεις (5.2α) και (5.2β) είναι δύο εξισώσεις, που ισχύουν συγχρόνως και περιγράφουν το κύκλωμα του σχ. 5.6. Η λύση του συστήματος είναι:

$$V_1 = \frac{100}{11} = 9.09\text{V} \;\; \text{και} \;\; V_2 = \frac{120}{11} = 10.91\text{V}$$

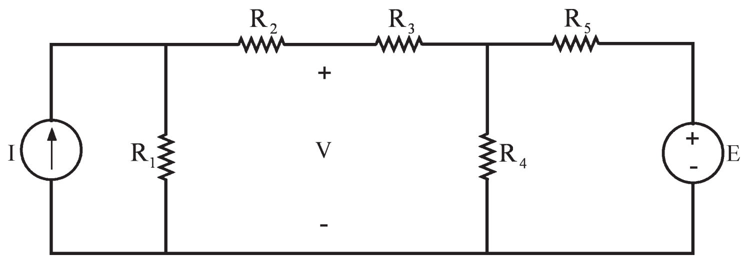
Αξίζει να σημειώσουμε ότι, από τη στιγμή, που ξέρουμε τα δυναμικά των κόμβων ως προς τον κόμβο αναφοράς, όλα τα ρεύματα των κλάδων μπορούν να υπολογιστούν, οπότε στη συνέχεια μπορούν να υπολογιστούν οι τάσεις στους κλάδους και η ισχύς σ' αυτούς.

Άσκηση εφαρμογής 5.1. Στο κύκλωμα του σχ. 5.7 να υπολογιστούν τα V_1, V_2 και I_1.
Δίνονται: I_α = 5A, I_β = 12A, R_1 = 16Ω, R_2 = 2Ω, R_3 = 20Ω, R_4 = 80Ω.



Σχήμα 5.7

Άσκηση εφαρμογής 5.2. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των κόμβων να υπολογίσετε την τάση V στο κύκλωμα του σχήματος 5.8. Δίνονται: I = 4.5A, E = 30V, R_1 = 1Ω, R_2 = 6Ω, R_3 = 2Ω, R_4 = 12V , R_5 = 4Ω.



Σχήμα 5.8

5.3. Γενίκευση της μεθόδου των κόμβων

Επιστρέφουμε στο κύκλωμα του σχήματος 5.5 και ξαναγράφουμε τις εξισώσεις των κόμβων

$$\frac{V_1 - E}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} + \frac{V_1 - V_2}{R_3} = 0$$

και

$$\frac{V_2 - V_1}{R_3} + \frac{V_2}{R_4} - I = 0$$

Προσπαθώντας να γενικεύσουμε τη μέθοδο των κόμβων χρησιμοποιούμε αγωγιμότητες αντί των αντιστάσεων και το προηγούμενο σύστημα γράφεται

$$(V_1 - E)G_1 + V_1G_2 + (V_1 - V_2)G_3 = 0$$

και

$$(V_2 - V_1)G_3 + V_2G_4 - I = 0$$

ή

$$(G_1 + G_2 + G_3)V_1 - G_3V_2 = EG_1$$

και

$$-G_3V_1 + (G_3 + G_4)V_2 = I$$

και γενικεύοντας τη μορφή του συστήματος

$$G_{11}V_1 - G_{12}V_2 = I_{11} \qquad (5.3\alpha)$$

και

$$-G_{21}V_1 + G_{22}V_2 = I_{22} \qquad (5.3\beta)$$

όπου:

I_{11}: το άθροισμα των ρευμάτων, που εισέρχονται στον κόμβο 1 και οφείλονται σε πηγές τάσης ή έντασης ρεύματος.

I_{22}: το άθροισμα των ρευμάτων, που εισέρχονται (+) [ή εξέρχονται (-)] στον κόμβο 2 και οφείλονται σε πηγές τάσης ή έντασης ρεύματος.

G_{11}: το άθροισμα των αγωγιμοτήτων των κλάδων που συνδέονται στον κόμβο 1.

G_{22}: το άθροισμα των αγωγιμοτήτων των κλάδων που συνδέονται στον κόμβο 2.

$G_{12} = G_{21}$: το άθροισμα των αγωγιμοτήτων του κλάδου, που ενώνει άμεσα τους κόμβους 1 και 2.

V_1: το δυναμικό στον κόμβο 1.

V_2: το δυναμικό στον κόμβο 2.

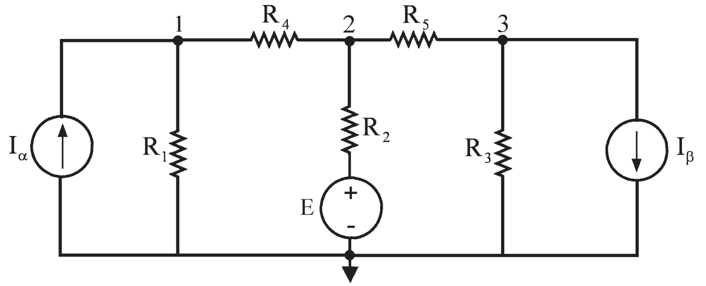
Το σύστημα των εξισώσεων (5.3) μπορεί να γραφεί με μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Για κύκλωμα με (κ_{no} + 1) ουσιώδεις κόμβους, όπου ζητούνται τα άγνωστα δυναμικά V_1, V_2,..., V_n των $\kappa_{no} = n$ κόμβων θα ισχύει η παρακάτω εξίσωση πινάκων.

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} \dots & -G_{1n} \\ -G_{21} & G_{22} \dots & -G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -G_{n1} & -G_{n2} \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ \vdots \\ I_{nn} \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

Παράδειγμα 5.1. Στο κύκλωμα του σχ. 5.9 ζητούνται τα δυναμικά των κόμβων. Να γραφεί η εξίσωση πινάκων του κυκλώματος.



Σχήμα 5.9

Λύση

Εφαρμόζοντας την εξ. (5.5) στο κύκλωμα που μελετάμε, προκύπτει

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} \ldots & -G_{13} \\ -G_{21} & G_{22} \ldots & -G_{23} \\ -G_{31} & -G_{32} \ldots & G_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

όπου

V_1, V_2, V_3 : τα άγνωστα δυναμικά των ουσιωδών κόμβων 1, 2, 3 αντίστοιχα

$$I_{11} = I_\alpha, \quad I_{22} = -\frac{E}{R_2} = -EG_2, \quad I_{33} = -I_\beta$$

$$G_{11} = G_1 + G_4 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4}$$

$$G_{22} = G_4 + G_2 + G_5 = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5}$$

$$G_{33} = G_5 + G_3 = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_3}$$

$$G_{12} = G_{21} = G_4 = \frac{1}{R_4}$$

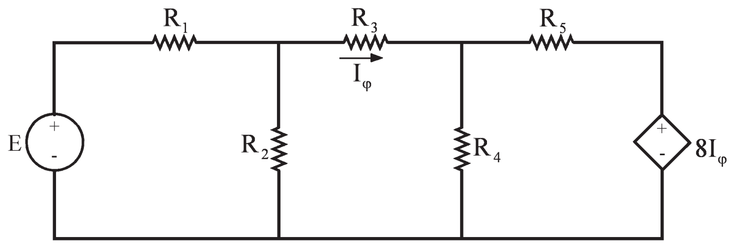
$$G_{13} = G_{31} = 0 \text{ (επειδή δεν υπάρχει άμεση σύνδεση μεταξύ των κόμβων 1 και 3)}$$

$$G_{23} = G_{32} = G_5 = \frac{1}{R_5}$$

5.4. Η μέθοδος των κόμβων σε κύκλωμα με εξαρτημένες πηγές

Θα μελετήσουμε την εφαρμογή της μεθόδου των κόμβων σε κύκλωμα με εξαρτημένες πηγές χρησιμοποιώντας το παρακάτω παράδειγμα.

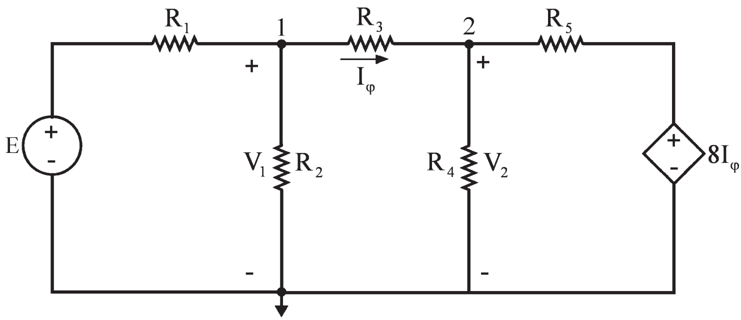
Παράδειγμα 5.2. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των κόμβων να βρεθεί η ισχύς, που αποτίθεται στην αντίσταση R_3 του κυκλώματος του σχ. 5.10, όπου $E = 20V$, $R_1 = R_5 = 2\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 5\Omega$ και $R_4 = 10\ \Omega$.



Σχήμα 5.10

Λύση

Σημειώνουμε κατ' αρχήν, ότι το κύκλωμα έχει τρεις ουσιώδεις κόμβους και επομένως θα χρειαστούμε δύο εξισώσεις κόμβων για να περιγράψουμε την κατάσταση λειτουργίας του κυκλώματος. Επειδή στο χαμηλότερο κόμβο καταλήγουν τέσσερεις κλάδοι, θα επιλέξουμε τον κόμβο αυτό ως κόμβο αναφοράς. Οι δυο άγνωστες τάσεις κόμβων ορίζονται στο κύκλωμα του σχ. 5.11.



Σχήμα 5.11

Η εξίσωση του κόμβου 1 γράφεται

$$\frac{V_1 - E}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} + \frac{V_1 - V_2}{R_3} = 0 \tag{5.7}$$

ενώ του κόμβου 2

$$\frac{V_2 - V_1}{R_3} + \frac{V_2}{R_4} + \frac{V_2 - 8I_\varphi}{R_5} = 0 \tag{5.8}$$

Οι εξ. (5.7) και (5.8) περιέχουν τρεις αγνώστους, V_1, V_2 και I_φ. Για να απαλείψουμε το I_φ θα πρέπει να εκφράσουμε αυτό το ρεύμα ελέγχου ως συνάρτηση των τάσεων V_1 και V_2. Έτσι θα έχουμε:

$$I_\varphi = \frac{V_1 - V_2}{R_3} \tag{5.9}$$

και αντικαθιστώντας το I_φ στην εξ. (5.8) προκύπτει

$$\frac{V_2 - V_1}{R_3} + \frac{V_2}{R_4} + \frac{V_2}{R_5} - \frac{8(V_1 - V_2)}{R_5 \cdot R_3} = 0 \tag{5.10}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στις εξ. (5.7) και (5.10) προκύπτει

$$0.75V_1 - 0.2V_2 = 10$$

$$-V_1 + 1.6V_2 = 0$$

οπότε

$$V_1 = 16\text{V} \text{ και } V_2 = 10\text{V}$$

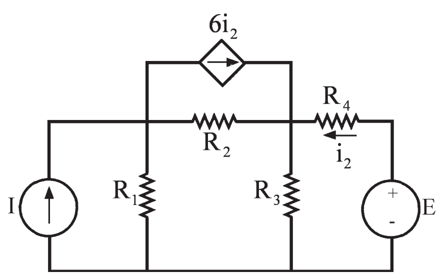
επίσης

$$I_\varphi = \frac{16 - 10}{5} = 1.2\text{A}$$

και

$$P_3 = I_\varphi^2 R_3 = (1.44)(5) = 7.2\,\text{W}$$

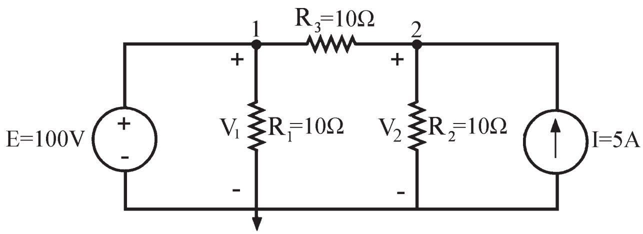
Άσκηση εφαρμογής 5.3. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των κόμβων να υπολογίσετε τα ρεύματα που διαρρέουν τους αντιστάτες του κυκλώματος του σχ. 5.12.



Σχήμα 5.12

5.5. Μέθοδος των κόμβων. Ορισμένες ειδικές περιπτώσεις

Παράδειγμα 5.3. Όταν μεταξύ δύο ουσιωδών κόμβων το μοναδικό στοιχείο είναι μια πηγή τάσης, η μέθοδος των κόμβων χρειάζεται κάποιους επιπλέον χειρισμούς. Η φύση του προβλήματος μπορεί να φανεί από τη μελέτη του κυκλώματος του σχ. 5.13, όπου έχει σημειωθεί ο κόμβος αναφοράς και οι τάσεις των κόμβων.



Σχήμα 5.13

Αν επιχειρήσουμε να γράψουμε μηχανικά την εξίσωση του κόμβου 1, τότε θα αντιμετωπίσουμε πρόβλημα σε σχέση με το ρεύμα, που αφήνει τον κόμβο 1 και διαρρέει την ανεξάρτητη πηγή τάσης Ε. Το πρόβλημα προκύπτει επειδή δεν υπάρχει αντιστάτης συνδεμένος σε σειρά με την πηγή Ε. Εκ πρώτης όψεως θα μπορούσε κανείς να πει ότι το ρεύμα στον κλάδο αυτό είναι άπειρο θεωρώντας τη σχέση (5.1), που εδώ γράφεται

$$I_1 = \frac{V_1 - E}{0}$$

Μια πιο προσεκτική όμως ματιά δείχνει ότι το V_1, θα πρέπει να είναι ίσο με Ε, οπότε προκύπτει για το ρεύμα η απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

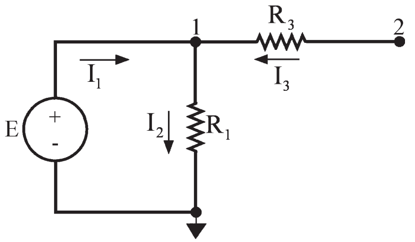
Στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$ θα καταλήξουμε, αν χρησιμοποιήσουμε την εξ. (5.5) και γράψουμε $G_{11} = \infty$, για τα δυναμικά V_1 και V_2.

Η παρατήρηση όμως ότι $V_1 = E$ σημαίνει ότι το V_1 είναι αμέσως γνωστό, οπότε δεν υπάρχει λόγος να θεωρήσουμε την εξίσωση του κόμβου 1. Έτσι η εξίσωση του κόμβου 2 θα μας λύσει το πρόβλημα, δηλαδή τον προσδιορισμό του V_2.

Είναι:

$$\frac{V_2 - V_1}{R_3} + \frac{V_2}{R_2} - I = 0 \tag{5.11}$$

όπου $V_1 = E$, και αντικαθιστώντας τα δεδομένα προκύπτει $V_2 = 125$ V.



Σχήμα 5.14

Το ρεύμα, που διαρρέει την R_3 θα είναι

$$I_3 = \frac{V_2 - V_1}{R_3} = \frac{125 - 100}{10} = 2.5A$$

με φορά, που φαίνεται στο σχ. 5.14, ενώ το ρεύμα, που διαρρέει την R_1 θα είναι

$$I_2 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{100}{25} = 4A$$

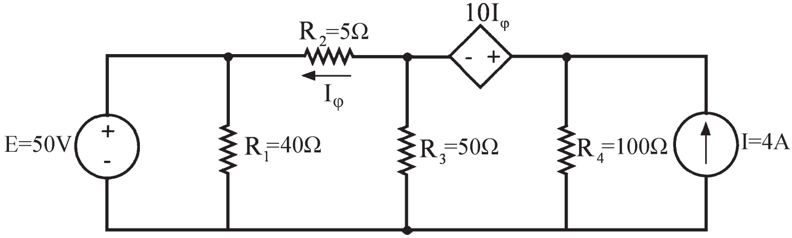
Επομένως, το ρεύμα I_1, που διαρρέει την πηγή τάσης Ε θα είναι

$$I_1 = I_2 - I_3 = 1.5A$$

με τη φορά, που φαίνεται στο σχ. 5.14.

Το σημαντικό συμπέρασμα λοιπόν, που προκύπτει από το παράδειγμα αυτό είναι ότι πηγές ρεύματος που συνδέονται άμεσα με δύο ουσιώδεις κόμβους μας δίνουν άμεσα επιπλέον σχέσεις για τη διαφορά τάσης μεταξύ των δύο κόμβων. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο κόμβων θα είναι ίση με την ΗΕΔ της πηγής.

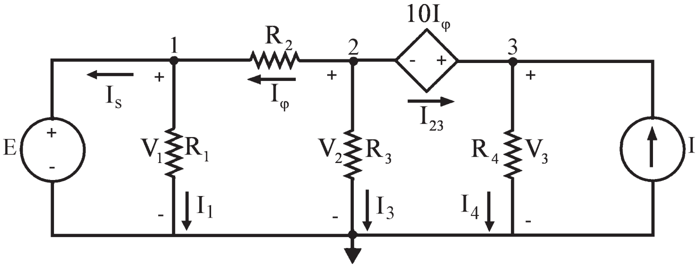
Παράδειγμα 5.4. Θεωρούμε το κύκλωμα του σχ. 5.15, στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε τα ρεύματα, που διαρρέουν τους αντιστάτες του. Η μελέτη του κυκλώματος θα γίνει με τη χρήση της μεθόδου των κόμβων.



Σχήμα 5.15. Κύκλωμα με εξαρτημένη πηγή τάσης συνδεμένη άμεσα σε δύο κόμβους.

Το υπό μελέτη κύκλωμα έχει τέσσερεις ουσιώδεις κόμβους, οπότε χρειάζεται να γράψουμε τρεις εξισώσεις κόμβων. Κοιτάζοντας πιο προσεκτικά το κύκλωμα παρατηρούμε ότι δύο ουσιώδεις κόμβοι συνδέονται με μια ανεξάρτητη πηγή τάσης, ενώ άλλοι δύο ουσιώδεις κόμβοι συνδέονται με μια εξαρτημένη πηγή τάσης, που ελέγχεται από ρεύμα. Επομένως θα χρειαστούμε μόνο μία εξίσωση κόμβου. Σε σχέση με την εκλογή του κόμβου αναφοράς μπορούμε να σκεφτούμε τα εξής. Κάθε ένας από τους δύο κόμβους στα άκρα της εξαρτημένης πηγής φαίνεται να είναι μία ελκυστική επιλογή, επειδή, αν επιλέξουμε τον αριστερό κόμβο ως κόμβο αναφοράς, ο δεξιός θα έχει δυναμικό $+10I_{\varphi}$, ενώ, αν επιλέξουμε το δεξιό, ο αριστερός θα έχει δυναμικό $-10I_{\varphi}$. Ο χαμηλότερος κόμβος φαίνεται ακόμα πιο ελκυστική επιλογή, επειδή αμέσως γνωρίζουμε το δυναμικό του κόμβου στο άλλο άκρο της ανεξάρτητης πηγής τάσης (50 V), ενώ πέντε κλάδοι του κυκλώματος καταλήγουν στον κόμβο αυτό. Έτσι επιλέγουμε το χαμηλότερο κόμβο ως κόμβο αναφοράς.

Το κύκλωμα έχει ξανασχεδιαστεί στο σχήμα 5.16, όπου σημειώνεται ο κόμβος αναφοράς, τα δυναμικά των κόμβων και το ρεύμα I_{23}, που διαρρέει την εξαρτημένη πηγή τάσης και που θα μας χρησιμεύσει στην ανάλυση, η οποία ακολουθεί.



Σχήμα 5.16

Για να γράψουμε την εξίσωση του κόμβου 2 ή του κόμβου 3 παρατηρούμε ότι δε μπορούμε να εκφράσουμε το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο της εξαρτημένης πηγής τάσης ως συνάρτηση των δυναμικών των κόμβων V_2 και V_3. Γι'αυτό εισάγουμε ένα άγνωστο ρεύμα I_{23}, το οποίο στη συνέχεια θα απαλείψουμε από τις εξισώσεις μας. Έτσι η εξίσωση του κόμβου 2 γράφεται

$$\frac{V_2 - V_1}{R_2} + \frac{V_2}{R_3} + I_{23} = 0 \tag{5.12}$$

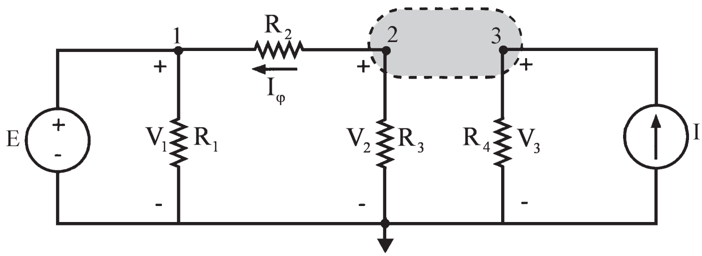
ενώ του κόμβου 3

$$\frac{V_3}{R_4} - I_{23} - I = 0 \tag{5.13}$$

Για να απαλείψουμε το ρεύμα I_{23} αρκεί να προσθέσουμε τις εξ.(5.12) και (5.13), οπότε παίρνουμε

$$\frac{V_2 - V_1}{R_2} + \frac{V_2}{R_3} + \frac{V_3}{R_4} - I = 0 \tag{5.14}$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (5.14) μπορεί να γραφεί απευθείας χωρίς τη μεσολάβηση των ενδιαμέσων εξισώσεων (5.12) και (5.13). Για να γράψουμε την εξ.(5.14) απευθείας θεωρούμε ότι οι κόμβοι 2 και 3 αποτελούν ένα μοναδικό κόμβο, οπότε, απλά, προσθέτουμε τα ρεύματα, που απομακρύνονται από τον κόμβο χρησιμοποιώντας όμως τα κατάλληλα δυναμικά, V_2 και V_3. Ο συνδυασμός των δύο κόμβων σε ένα αναφέρεται ως “υπερκόμβος” (supernode) και έχει σημειωθεί στο σχήμα 5.17, όπου ξανασχεδιάστηκε το κύκλωμα του σχήματος 5.16.



Σχήμα 5.17

Προφανώς ο νόμος των ρευμάτων του Kirchhoff θα ισχύει και στον υπερκόμβο. Η έννοια του υπερκόμβου μπορεί να χρησιμοποιηθεί κάθε φορά που δύο ουσιώδεις κόμβοι συνδέονται με ένα στοιχείο που είναι πηγή τάσης. Στην εξ. (5.14) η τάση V_1 είναι V_1 = E = 50 V, ενώ ισχύει

$$V_3 = V_2 + 10 I_\varphi \tag{5.15}$$

και

$$I_\varphi = \frac{V_2 - V_1}{R_2} \tag{5.16}$$

Αντικαθιστώντας στην εξ. (5.14) από τις εξ. (5.15) και (5.16) προκύπτει

$$V_2\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{10}{R_2R_4}\right)=\frac{E}{R_2}+I+\frac{10E}{R_2R_4} \tag{5.17}$$

Μετά την αντικατάσταση των αριθμητικών τιμών προκύπτει

$$V_2 = 60V$$

Από την εξ. (5.16)

$$I_\varphi = \frac{60-50}{5} = 2A$$

ενώ από την εξ. (5.15)

$$V_3 = 60+20 = 80V$$

Το ρεύμα που διαρρέει την R_1 θα είναι

$$I_1 = \frac{E}{R_1} = \frac{50}{40} = 1.25A$$

ενώ το ρεύμα που διαρρέει την R_3

$$I_3 = \frac{V_2}{R_3} = \frac{60}{50} = 1.2A$$

και το ρεύμα που διαρρέει την R_4

$$I_4 = \frac{V_3}{R_4} = \frac{80}{100} = 0.8A$$

Παρατηρούμε ότι στον υπερκόμβο ισχύει ο νόμος των ρευμάτων του Kirchhoff

$$I_\varphi + I_3 + I_4 - I = 2 + 1.2 + 0.8 - 4 = 0$$

Η ανεξάρτητη πηγή τάσης θα διαρρέεται από ρεύμα ίσο με

$$I_S = I_\varphi - I_1 = 2 - 1.25 = 0.75\ A$$

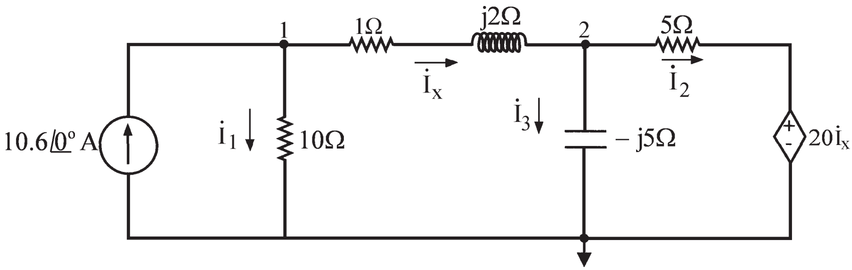
ενώ η εξαρτημένη πηγή τάσης από ρεύμα

$$I_{23} = -I_\varphi - I_3 = -2 - 1.2 = -3.2\ A$$

5.6. Η μέθοδος των τάσεων των κόμβων στο εναλλασσόμενο ρεύμα

Στις παραγράφους 5.2 - 5.5 αναπτύξαμε τις βασικές αρχές της μεθόδου των τάσεων των κόμβων για την ανάλυση κυκλωμάτων. Οι ίδιες αρχές ισχύουν και όταν χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των τάσεων των κόμβων, για να αναλύσουμε κυκλώματα στο πεδίο των φασικών παραστάσεων. Αυτό θα φανεί καλύτερα με το παράδειγμα, που ακολουθεί.

Παράδειγμα 5.5. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των τάσεων των κόμβων να βρείτε τα ρεύματα $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ και $\dot{I}_3$ στο κύκλωμα του σχ. 5.18.



Σχήμα 5.18

Λύση

Το κύκλωμα του σχήματος 5.18 περιλαμβάνει τρεις ουσιώδεις κόμβους και έχουμε επιλέξει ως ουσιώδη εκείνον, στον οποίο καταλήγουν τέσσερεις κλάδοι. Ως προς τον κόμβο αναφοράς οι τάσεις των κόμβων 1 και 2 είναι $\dot{V}_1$ και $\dot{V}_2$ αντίστοιχα.

Αθροίζοντας αλγεβρικά τα ρεύματα που φεύγουν από τον κόμβο 1 παίρνουμε

$$-10.6 + \frac{\dot{V}_1}{10} + \frac{\dot{V}_1 - \dot{V}_2}{1 + j2} = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας επί (1+j2) και κάνοντας αναγωγή των ομοίων όρων προκύπτει

$$\dot{V}_1\,(1.1 + j0.2) - \dot{V}_2 = 10.6 + j21.2 \qquad (5.18)$$

Αθροίζοντας αλγεβρικά τα ρεύματα που φεύγουν από τον κόμβο 2 παίρνουμε

$$-\frac{\dot{V}_1-\dot{V}_2}{1+j2}+\frac{\dot{V}_2}{-j5}+\frac{\dot{V}_2-20\dot{I}_x}{5}=0 \tag{5.19}$$

ενώ το ρεύμα ελέγχου $\dot{I}_x$ είναι

$$\dot{I}_x=\frac{\dot{V}_1-\dot{V}_2}{1+j2} \tag{5.20}$$

Αντικαθιστώντας από την εξ. (5.20) στην εξ. (5.19) και κάνοντας πράξεις παίρνουμε τελικά

$$-5\,\dot{V}_1+(4.8+j0.6)\;\dot{V}_2=0 \tag{5.21}$$

Λύνοντας το σύστημα των εξ. (5.18) και (5.21) παίρνουμε

$$\dot{V}_1\;=68.4-j\;16.8\;\text{V}$$

και

$$\dot{V}_2\;=68-j\;26\;\text{V}$$

Τα ρεύματα των κλάδων είναι

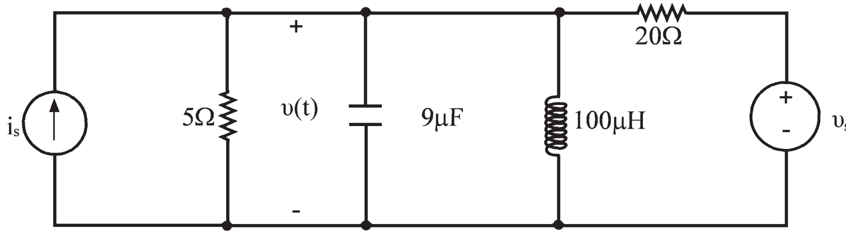
$$\dot{I}_1=\frac{\dot{V}_1}{10}=6.84-j1.68\,\text{A}$$

$$\dot{I}_x=\frac{\dot{V}_1-\dot{V}_2}{1+j2}=3.76+j1.68\,\text{A}$$

$$\dot{I}_2=\frac{\dot{V}_2-20\dot{I}_x}{5}=-1.44-j11.92\,\text{A}$$

$$\dot{I}_3=\frac{\dot{V}_2}{-j5}=5.2+j13.6\,\text{A}$$

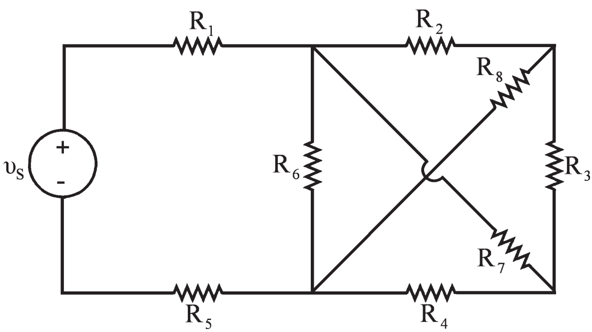
Άσκηση εφαρμογής 5.4. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των τάσεων των κόμβων να βρείτε την έκφραση της τάσης υ(t) στη σταθερή κατάσταση λειτουργίας στο κύκλωμα του σχ. 5.19. Οι ημιτονοειδείς πηγές δίνουν αντίστοιχα i_s = 10 cosωt A και $υ_s$ = 100 sinωt V, όπου ω = 50 krad/s.



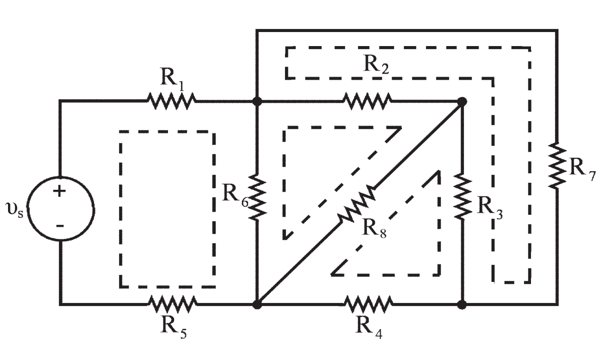
Σχήμα 5.19

5.7. Εισαγωγή στη μέθοδο των βρόχων

Η μέθοδος των βρόχων ή μέθοδος των ρευμάτων των βρόχων μας επιτρέπει να επιλύσουμε ένα κύκλωμα χρησιμοποιώντας $[κ_b - (κ_n\text{-}1)]$ ή $[κ_{bo} - (κ_{no}\text{-}1)]$ εξισώσεις (βλ. παράγραφο 5.1). Σ' ένα επίπεδο κύκλωμα (κύκλωμα, που μπορεί να σχεδιαστεί σ' ένα επίπεδο, χωρίς να τέμνονται οι κλάδοι μεταξύ τους) ο αριθμός των βρόχων του είναι ίσος με τα "παραθυράκια", που σχηματίζονται, όταν το κύκλωμα σχεδιαστεί χωρίς διασταυρούμενους κλάδους.



(α)

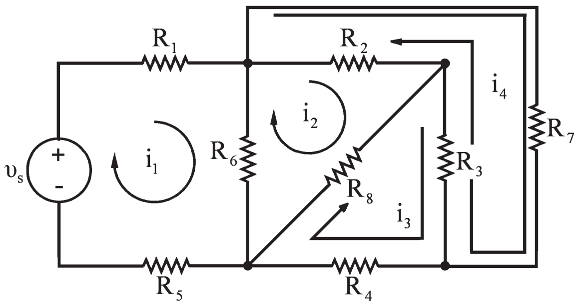


(β)

Σχήμα 5.20 (α) Επίπεδο κύκλωμα. (β) Επανασχεδίαση του κυκλώματος για να επιβεβαιωθεί ότι είναι επίπεδο.

Στο κύκλωμα του σχ. 5.20 (β) τα “παραθυράκια” σημειώνονται με εστιγμένες κλειστές διαδρομές, ενώ υπάρχουν επτά ουσιώδεις κλάδοι, που διαρρέονται από άγνωστα ρεύματα. Επειδή το κύκλωμα περιέχει τέσσερεις ουσιώδεις κόμβους, θα χρειαστεί να γράψουμε τέσσερεις [7 - (4-1)] εξισώσεις ρευμάτων βρόχων.

Το ρεύμα βρόχου ορίζεται ως το ρεύμα που κυκλοφορεί μόνο στην περίμετρο του βρόχου και το σημειώνουμε συνήθως με μια σχεδόν κλειστή πλήρη γραμμή, που ακολουθεί την περίμετρο του αντίστοιχου βρόχου. Η κατεύθυνση αναφοράς του ρεύματος σημειώνεται με ένα βέλος στο ένα άκρο της γραμμής.

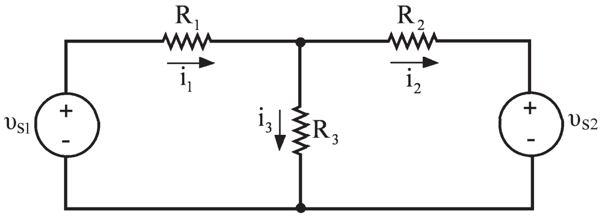


Σχήμα 5.21

Για να περιγράψουμε το κύκλωμα του σχ.5.20 χρειαζόμαστε τέσσερα ρεύματα βρόχων, τα οποία έχουν σημειωθεί στο σχ.5.21. Να σημειώσουμε, ότι εξ ορισμού τα ρεύματα βρόχων ικανοποιούν αυτόματα το νόμο των ρευμάτων του Kirchhoff.

Μελετώντας το κύκλωμα του σχ.5.21 παρατηρούμε, ότι, από τον ορισμό του, ένα ρεύμα βρόχου δεν ταυτίζεται πάντα με κάποιο ρεύμα κλάδου. Για παράδειγμα, το ρεύμα βρόχου i_2 δεν ταυτίζεται με κανένα ρεύμα κλάδου, κάτι που συμβαίνει με τα ρεύματα βρόχων i_1, i_3 και i_4. Έτσι δεν είναι πάντα δυνατό να μετρήσουμε ένα ρεύμα βρόχου, δηλαδή στο κύκλωμα του σχ.5.21 δεν μπορούμε να συνδέσουμε ένα αμπερόμετρο σε κάποιο κλάδο του κυκλώματος, ώστε να μας δώσει την τιμή του i_2. Το γεγονός ότι το ρεύμα βρόχου μπορεί να είναι μια μη μετρήσιμη ποσότητα δεν σημαίνει ότι είναι μια άχρηστη έννοια. Αντίθετα είναι πολύ χρήσιμη στην ανάλυση ενός κυκλώματος.

Η μέθοδος των βρόχων αποτελεί φυσική εξέλιξη των εξισώσεων των κλάδων, που προέρχονται από εφαρμογή των νόμων του Kirchhoff. Αυτό μπορεί να δειχθεί με τη βοήθεια του κυκλώματος του σχ. 5.22, όπου i_1, i_2, i_3 είναι τα ρεύματα των κλάδων.



Σχήμα 5.22

Το κύκλωμα αυτό έχει δύο ουσιώδεις κόμβους και τρεις ουσιώδεις κλάδους, οπότε μπορούμε να γράψουμε μια ανεξάρτητη εξίσωση ρευμάτων, ενώ θα χρειαστούμε και δύο ανεξάρτητες εξισώσεις τάσεων. Εφαρμόζοντας το νόμο των ρευμάτων του Kirchhoff στον επάνω κόμβο και το νόμο των τάσεων του Kirchhoff κατά μήκος των δύο βρόχων προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις.

$$i_1 = i_2 + i_3 \tag{5.22}$$

$$\upsilon_{s1} = i_1R_1 + i_3R_3 \tag{5.23}$$

$$-\upsilon_{s2} = i_2R_2 - i_3R_3 \tag{5.24}$$

Μπορούμε να ανάγουμε τις τρείς αυτές εξισώσεις σε δύο, αν λύσουμε την εξ. (5.22) ως προς i_3 και αντικαταστήσουμε στις εξ. (5.23) και (5.24). Προκύπτει λοιπόν

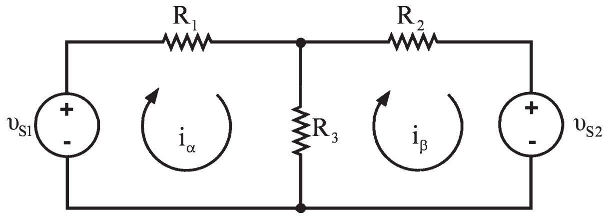
$$\upsilon_{s1} = i_1\,(R_1+R_3) - i_2R_3 \tag{5.25}$$

$$-\upsilon_{s2} = -i_1R_3 + i_2\,(R_2+R_3) \tag{5.26}$$

οπότε το αρχικό σύστημα των τριών εξισώσεων έχει αναχθεί σε σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τα ρεύματα i_1, και i_2.

Οι εξισώσεις (5.25) και (5.26) προέκυψαν αντικαθιστώντας (κ_{no}-1) εξισώσεις ρευμάτων σε [κ_{bo} - (κ_{no}-1)] εξισώσεις τάσεων. Η αξία της μεθόδου των ρευμάτων βρόχων έγκειται στο γεγονός, ότι ορίζοντας τα ρεύματα βρόχων είναι σαν να αντικαθιστούμε τις (κ_{no}-1) εξισώσεις ρευμάτων στις [κ_{bo}- (κ_{no}-1)] εξισώσεις τάσεων.

Τα ρεύματα βρόχων του κυκλώματος του σχ. 5.22 φαίνονται στο σχ. 5.23.



Σχήμα 5.23

Εφαρμόζουμε το νόμο των τάσεων του Kirchhoff κατά μήκος των δύο βρόχων εκφράζοντας όλες τις τάσεις στα άκρα των αντιστατών συναρτήσει των ρευμάτων βρόχων, οπότε

$$\upsilon_{s1} = i_\alpha R_1 + (i_\alpha - i_\beta)R_3 \tag{5.27}$$

και

$$-\upsilon_{s2} = (i_\beta - i_\alpha) R_3 + i_\beta R_2 \tag{5.28}$$

Οι εξισώσεις (5.27) και (5.28) γράφονται

$$\upsilon_{s1} = i_\alpha (R_1 + R_3) - i_\beta R_3 \tag{5.29}$$

και

$$-\upsilon_{s2} = -i_\alpha R_3 + i_\beta(R_2 + R_3) \tag{5.30}$$

Συγκρίνοντας τις εξ. (5.29) και (5.30) με τις εξ. (5.25) και (5.26) βλέπουμε ότι έχουν την ίδια μορφή, ενώ τα ρεύματα βρόχων i_α και i_β έχουν αντικαταστήσει τα ρεύματα κλάδων i_1 και i_2. Συγκρίνοντας τα κυκλώματα των σχ. 5.22 και 5.23 παρατηρούμε επίσης ότι τα ρεύματα των κλάδων μπορούν να εκφραστούν σαν συναρτήσεις των ρευμάτων των βρόχων

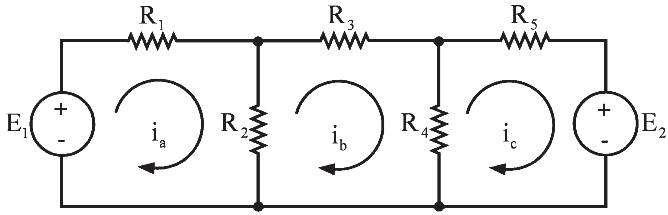
$$i_1 = i_\alpha$$

$$i_2 = i_\beta$$

$$i_3 = i_\alpha - i_\beta$$

Το ότι μπορούμε με απλή παρατήρηση των κυκλωμάτων να γράψουμε τα ρεύματα των κλάδων, όταν γνωρίζουμε τα ρεύματα των βρόχων, είναι πολύ σημαντικό για τη μέθοδο αυτή επίλυσης των κυκλωμάτων.

Παράδειγμα 5.6. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ρευμάτων βρόχων να προσδιορίσετε τις ισχείς, που αποτίθενται στους αντιστάτες R_2 και R_5, του κυκλώματος του σχ. 5.24. Δίνονται: $E_1 = 40V$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 8\Omega$, $R_3 = 6\Omega$, $R_4 = 6\Omega$, $R_5 = 4\Omega$ και $E_2 = 20V$.



Σχήμα 5.24

Λύση

Για να υπολογίσουμε τις ισχείς που ζητούνται θα πρέπει να προσδιορίσουμε τις εντάσεις των ρευμάτων που διαρρέουν τους αντιστάτες R_2 και R_5.

Το κύκλωμα έχει τρεις ουσιώδεις κόμβους και πέντε ουσιώδεις κλάδους, οπότε χρειαζόμαστε 5-(3-1)=3 εξισώσεις ρευμάτων βρόχων για την επίλυση του κυκλώματος. Τα τρία ρεύματα βρόχων έχουν σχεδιαστεί στο σχ. 5.24, και οι τρεις εξισώσεις γράφονται:

$$R_1 i_a + R_2(i_a - i_b) = E_1$$

$$R_2(i_b - i_a) + R_3 i_b + R_4(i_b - i_c) = 0 \tag{5.31}$$

$$R_4(i_c - i_b) + R_5 i_c = -E_2$$

και αναδιατάσσοντας του όρους

$$i_a(R_1+R_2) - R_2 i_b + 0 i_c = E_1$$

$$-R_2\, i_a + (R_2 + R_3 + R_4) i_b - R_4\, i_c = 0 \tag{5.32}$$

$$0.i_a - R_4\, i_b + R_5\, i_c = -E_2$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές στις εξ. (5.32) προκύπτουν οι εξισώσεις

$$10\, i_a - 8\, i_b + 0\, i_c = 40$$

$$-8\, i_a + 20\, i_b - 6\, i_c = 0 \tag{5.33}$$

$$0 i_a - 6\, i_b + 10\, i_c = -20$$

Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & -8 & 0 \\ -8 & 20 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 100(200-36)+8(-80)=1000$$

Τα τρία ρεύματα βρόχων είναι

$$i_\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 40 & -8 & 0 \\ 0 & 20 & -6 \\ -20 & -6 & 10 \end{vmatrix}}{1000} = \frac{40(200-36)+8(-120)}{1000} = 5.6\,\text{A}$$

$$i_b = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 40 & 0 \\ -8 & 0 & -6 \\ 0 & -20 & 10 \end{vmatrix}}{1000} = \frac{10(-120)-40(-80)}{1000} = 2.0\,\text{A}$$

$$i_c = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -8 & 40 \\ -8 & 20 & 0 \\ 0 & -6 & -20 \end{vmatrix}}{1000} = \frac{10(-400)+8(160+240)}{1000} = -0.8\,\text{A}$$

Ο αντιστάτης R_2 θα διαρρέεται από ρεύμα

$$i_2 = i_a - i_b = 3.6\ \text{A}$$

που θα έχει την ίδια φορά με το ρεύμα βρόχου i_a και η ισχύς που θα αποτίθεται σ’ αυτόν θα είναι

$$P_2 = i_2^2 R_2 = (3.6)^2 \times 8 = 103.68\,\text{W}$$

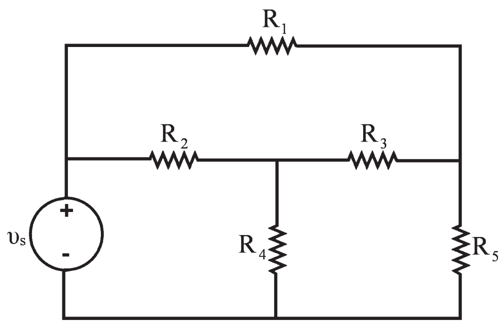
Ο αντιστάτης R_5 διαρρέεται από ρεύμα

$$i_5 = -i_c = 0.8\ \text{A}$$

που έχει συμβατική φορά αντίθετη από το ρεύμα βρόχου i_c. Η ισχύς που αποτίθεται σ’ αυτόν θα είναι

$$P_5 = i_2^2 R_5 = (0.8)^2 \times 4 = 2.56\,\text{W}$$

Άσκηση εφαρμογής 5.5. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ρευμάτων βρόχων, να υπολογίσετε στο κύκλωμα του σχ. 5.25, την ισχύ, που προσφέρει η πηγή στο κύκλωμα, και την ισχύ που αποτίθεται στον αντιστάτη R_5. Δίνονται $\upsilon_s = 100$ V, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $R_4 = 40\ \Omega$, $R_5 = 15\ \Omega$.



Σχήμα 5.25

5.8. Γενίκευση της μεθόδου των βρόχων

Επιστρέφουμε στο κύκλωμα του σχ. 5.24 και γράφουμε τις εξ. (5.32) με μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \\ -E_2 \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

ή

$$\begin{bmatrix} R_{11} & -R_{12} & R_{13} \\ -R_{21} & R_{22} & -R_{23} \\ R_{31} & -R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

όπου

R_{11} : το άθροισμα όλων των αντιστάσεων στο βρόχο 1.

R_{22} : το άθροισμα όλων των αντιστάσεων στο βρόχο 2.

R_{33} : το άθροισμα όλων των αντιστάσεων στο βρόχο 3.

$R_{12}=R_{21}$: το άθροισμα όλων των αντιστάσεων που είναι κοινές για τους βρόχους 1 και 2.

$R_{13}=R_{31}$: το άθροισμα όλων των αντιστάσεων που είναι κοινές για τους βρόχους 1 και 3. Εδώ οι βρόχοι 1 και 3 δεν έχουν κοινούς αντιστάτες, οπότε $R_{13}=R_{31}=0$.

$R_{23}=R_{32}$: το άθροισμα όλων των αντιστάσεων που είναι κοινές για τους βρόχους 2 και 3.

E_{11} : το άθροισμα των ΗΕΔ στο βρόχο 1 κατά τη φορά του ρεύματος βρόχου i_a.

E_{22} : το άθροισμα των ΗΕΔ στο βρόχο 2 κατά τη φορά του ρεύματος βρόχου i_b.

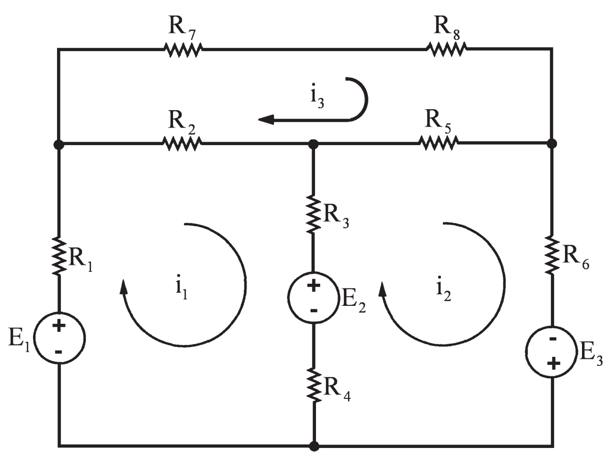
E_{33} : το άθροισμα των ΗΕΔ στο βρόχο 3 κατά τη φορά του ρεύματος βρόχου i_c.

Οι αμοιβαίες αντιστάσεις $R_{12}=R_{21}$ και $R_{23}=R_{32}$ φέρουν αρνητικό πρόσημο, επειδή τα ρεύματα βρόχων i_a, i_b και i_b, i_c τις διαρρέουν αντίστοιχα κατ' αντίθετη φορά. Για κύκλωμα με n βρόχους η μορφή της εξίσωσης πινάκων γίνεται

$$\begin{bmatrix} R_{11} & \pm R_{12} \dots & \pm R_{1n} \\ \pm R_{21} & R_{22} \dots & \pm R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \pm R_{n1} & \pm R_{n2} \dots & R_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ \vdots \\ E_{nn} \end{bmatrix} \tag{5.36}$$

Το πρόσημο των αμοιβαίων αντιστάσεων R_{ij} εξαρτάται από τη σχετική φορά των ρευμάτων βρόχων, που τις διαρρέουν. Αν τα ρεύματα βρόχων i_i και i_j είναι ομόροπα επί της R_{ij}, τότε το πρόσημο της είναι θετικό. Αν είναι αντίρροπα, τότε είναι αρνητικό.

Παράδειγμα 5.7. Να γραφτούν με μορφή πινάκων οι εξισώσεις ρευμάτων βρόχων του κυκλώματος του σχ. 5. 26. Δίνονται: $E_1 = 8V$, $E_2 = 20V$, $E_3 = 4V$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 1\Omega$, $R_4 = 5\Omega$, $R_5 = 8\Omega$, $R_6 = 4\Omega$, $R_7 = 5\Omega$, $R_8 = 7\Omega$.



Σχήμα 5.26

Λύση

Το κύκλωμα του σχ.5.26 έχει τέσσερεις ουσιώδεις κόμβους και έξη ουσιώδεις κλάδους, οπότε ο αριθμός των απαραίτητων εξισώσεων ρευμάτων βρόχων για την επίλυση του κυκλώματος είναι ίσος με 6-(4-1) = 3. Επιλέγουμε τους βρόχους και ορίζουμε τα ρεύματα τους i_1, i_2, i_3 κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Σύμφωνα με την εξ. (5.36) η εξίσωση πινάκων θα είναι

$$\begin{bmatrix} R_{11} & -R_{12} & R_{13} \\ -R_{21} & R_{22} & -R_{23} \\ -R_{31} & -R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{bmatrix} \tag{5.37}$$

με άγνωστους τα ρεύματα i_1, i_2, i_3.

Από το κύκλωμα προκύπτει ότι

$R_{11} = R_1+R_2+R_3+R_4 = 12\Omega$
$R_{22} = R_3+R_4+R_5+R_6 = 18\Omega$
$R_{33} = R_2+R_5+R_7+R_8 = 24\Omega$
$R_{12} = R_{21} = R_3+R_4 = 6\Omega$
$R_{13} = R_{31} = R_2 = 4\Omega$
$R_{23} = R_{32} = R_5 = 8\Omega$
$E_{11} = E_1-E_2 = 8-20 = -12V$
$E_{22} = E_2+E_3 = 20+4 = 24V$
$E_{33} = 0$ (δεν υπάρχει πηγή τάσης στον τρίτο βρόχο).

Αντικαθιστούμε τα αριθμητικά δεδομένα στην εξ. (5.37), οπότε προκύπτει

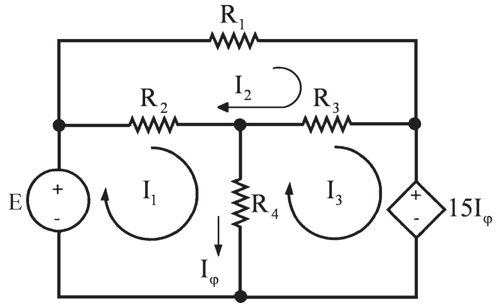
$$\begin{bmatrix} 12 & -6 & -4 \\ -6 & 18 & -8 \\ -4 & -8 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 24 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} 12i_1 - 6i_2 - 4i_3 &= -12 \\ -6i_1 + 18i_2 - 8i_3 &= 24 \\ -4i_1 - 8i_2 + 24i_3 &= 0 \end{aligned}$$

Η λύση είναι i_1 = -0.067 A, i_2 = 1.53 A και i_3 = 0.50 A.

5.9. Η μέθοδος των βρόχων σε κύκλωμα με εξαρτημένες πηγές

Εάν το κύκλωμα περιέχει εξαρτημένες πηγές, τότε οι εξισώσεις των ρευμάτων βρόχων πρέπει να συμπληρωθούν από τις κατάλληλες εξισώσεις λόγω των συνθηκών, που επιβάλλει η παρουσία των εξαρτημένων πηγών. Αυτό θα φανεί στο παρακάτω παράδειγμα, όπου η μέθοδος των βρόχων εφαρμόζεται σε κύκλωμα, που περιέχει μια εξαρτημένη πηγή.

Παράδειγμα 5.8. Με τη χρήση της μεθόδου των βρόχων να προσδιοριστεί η ισχύς, που αποτίθεται στον αντιστάτη R_3 του κυκλώματος του σχ.5.27. Δίνονται: $E = 50V$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_4 = 20\Omega$.



Σχήμα 5.27

Λύση

Το κύκλωμα του σχ. 5.27 περιλαμβάνει τέσσερεις ουσιώδεις κόμβους και έξη ουσιώδεις κλάδους, που διαρρέονται από άγνωστα ρεύματα. Ο αριθμός των απαραίτητων εξισώσεων ρευμάτων βρόχων για την επίλυση του κυκλώματος θα είναι ίσος με 6-(4-1) = 3. Στο σχ. 5.27 έχουν σχεδιαστεί τα ρεύματα βρόχων και οι εξισώσεις που περιγράφουν το κύκλωμα είναι

$$5(I_1 - I_2) + 20(I_1 - I_3) = 50 \tag{5.38}$$

$$5(I_2 - I_1) + I_2 + 4(I_2 - I_3) = 0 \tag{5.39}$$

$$20(I_3 - I_1) + 4(I_3 - I_2) + 15I_\varphi = 0 \tag{5.40}$$

Το ρεύμα του κλάδου, που ελέγχει την εξαρτημένη πηγή τάσης, εκφράζεται ως συνάρτηση των ρευμάτων βρόχων

$$I_\varphi = I_1 - I_3 \tag{5.41}$$

Η εξ.(5.41) είναι η συμπληρωματική εξίσωση, που επιβάλλεται από την παρουσία της εξαρτημένης πηγής.

Αντικαθιστούμε το I_φ από την εξ. (5.41) στην εξ. (5.40) και ξαναγράφουμε τις εξ. (5.38) - (5.40)

$$\begin{aligned}
25I_1 - 5I_2 - 20I_3 &= 50 \\
-5I_1 + 10I_2 - 4I_3 &= 0 \\
-5I_1 - 4I_2 + 9I_3 &= 0
\end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος είναι

$$I_1 = 29.6 \text{ A}, I_2 = 26 \text{ A}, I_3 = 28 \text{ A}$$

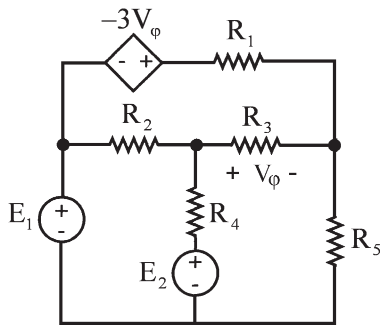
Το ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη R_3 από αριστερά προς τα δεξιά είναι ίσο με $I_3 - I_2 = 2A$ και η ισχύς που αποτίθεται σ' αυτόν

$$P_3 = (I_3 - I_2)^2 R_3 = (2)^2 \cdot 4 = 16 \text{ W}$$

• Αξίζει να σημειώσουμε ότι, αν η εκφώνηση δε μας επέβαλε τη χρήση της μεθόδου των βρόχων, θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει τη μέθοδο των κόμβων μια, που η παρουσία δύο πηγών τάσης συνδεμένων μεταξύ ουσιωδών κόμβων ελαττώνει σε μία τον αριθμό των απαραίτητων εξισώσεων κόμβων. Όμως για την επιλογή της προσφορότερης μεθόδους επίλυσης θα αναφερθούμε στο τέλος αυτού του κεφαλαίου.

Άσκηση εφαρμογής 5.6. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ρευμάτων βρόχων να βρεθούν οι ισχείς που αποτίθενται στους αντιστάτες του κυκλώματος του σχ. 5.28.

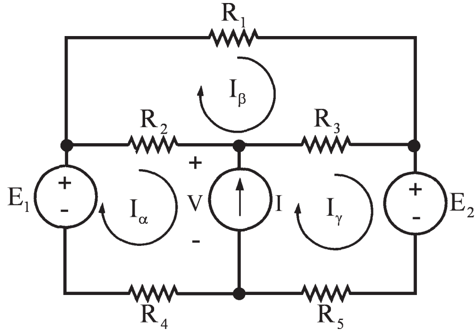
Δίνονται: $E_1 = 25V$, $E_2 = 10V$, $R_1 = 14\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 5\Omega$ και $R_5 = 1\Omega$.



Σχήμα 5.28

5.10. Η μέθοδος βρόχων. Ορισμένες ειδικές περιπτώσεις

Όταν ένας κλάδος κάποιου κυκλώματος περιλαμβάνει μια πηγή ρεύματος, η μέθοδος των βρόχων απαιτεί κάποιους επιπρόσθετους χειρισμούς. Η φύση του προβλήματος μπορεί να γίνει κατανοητή από το κύκλωμα που φαίνεται στο σχ.5.29, όπου $E_1 = 100V$, $E_2 = 50$ V, $I = 5A$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $R_4 = 6\Omega$, $R_5 = 4\Omega$.



Σχήμα 5.29

Τα ρεύματα βρόχων $I_α$, $I_β$, $I_γ$ καθώς και η τάση V κατά μήκος της ανεξάρτητης πηγής ρεύματος I έχουν σημειωθεί πάνω στο κύκλωμα.

Αναλύοντας το κύκλωμα παρατηρούμε ότι υπάρχουν τέσσερεις ουσιώδεις κόμβοι και πέντε ουσιώδεις κλάδοι, που διαρρέονται από άγνωστα ρεύματα. Επομένως θα χρειαστούμε 5-(4-1)=2 εξισώσεις βρόχων για να λύσουμε το κύκλωμα. Αν χρησιμοποιήσουμε τα “παραθυράκια”, για να ορίσουμε τους βρόχους, βλέπουμε ότι τα τρία άγνωστα ρεύματα βρόχων έχουν αναχθεί σε δύο, επειδή η πηγή έντασης ρεύματος, που συζευγνύει τους βρόχους α και γ, μας δίνει τη διαφορά των εντάσεων των ρευμάτων

$$I_γ - I_α = I = 5A \tag{5.42}$$

Όταν όμως προσπαθήσουμε να προσθέσουμε τις τάσεις κατά μήκος είτε του βρόχου α είτε του βρόχου γ, αναγκαζόμαστε να εισάγουμε στις εξισώσεις μας την άγνωστη τάση V στα άκρα της πηγής έντασης ρεύματος.

$$\text{βρόχος α} : E_1 = R_2 (I_α - I_β) + V + R_4 I_α \tag{5.43}$$

$$\text{βρόχος γ} : -E_2 = R_5 I_γ - V + R_3 (I_γ – I_β) \tag{5.44}$$

Μπορούμε να απαλείψουμε την άγνωστη τάση V προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις, οπότε προκύπτει

$$E_1 - E_2 = I_α(R_2+R_4) - I_β(R_2 + R_3) + I_γ(R_3+R_5) \tag{5.45}$$

Για το βρόχο β έχουμε

$$0 = R_2(I_β-I_α) + R_1 I_β + R_3(I_β-I_γ) \tag{5.46}$$

Μπορούμε να ελαττώσουμε τον αριθμό των αγνώστων στις εξ. (5.45) και (5.46) χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.42). Η λύση που προκύπτει για τα ρεύματα βρόχων δίνει

$$I_α = 1.75\ A$$

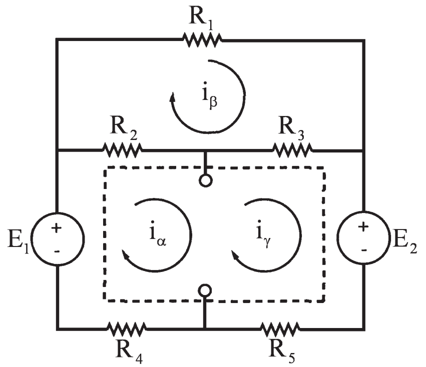
$$I_β = 1.25\ A$$

και

$$I_γ = 6.75\ A$$

Η εξ. (5.45) μπορεί να προκύψει χωρίς τη βοήθεια της άγνωστης τάσης V χρησιμοποιώντας την έννοια του “υπερβρόχου” (supermesh). Για να δημιουργήσουμε τον υπερβρόχο, αφαιρούμε νοερά την πηγή έντασης ρεύματος από το κύκλωμα και αγνοούμε αυτόν τον κλάδο, όταν γράφουμε τις εξισώσεις των ρευμάτων βρόχων. Οι τάσεις κατά μήκος του υπερβρόχου εκφράζονται ως συναρτήσεις των ρευμάτων βρόχων, που ορίστηκαν από τα αρχικά “παραθυράκια” του κυκλώματος.

Η έννοια του υπερβρόχου έχει σχεδιαστεί στο σχ. 5.30. Όταν αθροίσουμε



Σχήμα 5.30

τις τάσεις κατά μήκος του υπερβρόχου, ο οποίος σημειώνεται με την εστιγμένη γραμμή, προκύπτει η εξίσωση

$$-E_1 + R_2(I_\alpha - I_\beta) + R_3(I_\gamma - I_\beta) + E_2 + R_5 I_\gamma + R_4 I_\alpha = 0$$

που καταλήγει στην εξ. (5.45)

$$E_1 - E_2 = I_\alpha(R_2+R_4) - I_\beta(R_2+R_3) + I_\gamma(R_3+R_5)$$

5.11. Η μέθοδος των ρευμάτων βρόχων στο εναλλασσόμενο ρεύμα

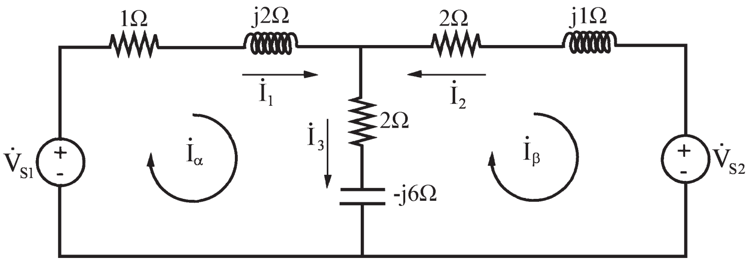
Στην περίπτωση επίλυσης κυκλωμάτων εναλλασσομένου ρεύματος με τη μέθοδο των βρόχων μπορούμε να ακολουθήσουμε την ίδια μεθοδολογία που αναπτύξαμε στις παραγράφους 5.7-5.10. Αντί όμως της εξ.(5.36) θα χρησιμοποιήσουμε τη γενικευμένη της έκφραση, η οποία προκύπτει ως ακολούθως. Στη θέση των ωμικών αντιστάσεων βάζουμε τις σύνθετες αντιστάσεις με την ίδια φυσική σημασία, ενώ τα ρεύματα και οι τάσεις χρησιμοποιούνται με τις φασικές τους παραστάσεις. Θα είναι λοιπόν

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_{11} & \pm\dot{Z}_{12}\ldots & \pm\dot{Z}_{1n} \\ \pm\dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22}\ldots & \pm\dot{Z}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \pm\dot{Z}_{n1} & \pm\dot{Z}_{n2}\ldots & \dot{Z}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \\ \vdots \\ \dot{E}_{nn} \end{bmatrix} \tag{5.47}$$

Για τα πρόσημα των αμοιβαίων αντιστάσεων $\dot{Z}_{ij}$ ισχύουν οι αντίστοιχες παρατηρήσεις της παραγράφου 5.8 για τις αντιστάσεις R_{ij}.

Παράδειγμα 5.9. Στο κύκλωμα του σχ. 5.31 είναι $\dot{V}_{S1} = 10\angle 0^o V$ και $\dot{V}_{S2} = 5\angle 90^o V$.
Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των βρόχων να υπολογίσετε τα ρεύματα των κλάδων $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ και $\dot{I}_3$. Αν ω = 10^3 rad/s, να γραφούν οι εκφράσεις των $i_1(t)$, $i_2(t)$ και $i_3(t)$.

Λύση



Σχήμα 5.31

Στο κύκλωμα του σχ.5.31 έχουμε δύο βρόχους και ορίζουμε τα αντίστοιχα ρεύματα $\dot{I}_\alpha$ και $\dot{I}_\beta$. Σύμφωνα με την εξ. (5.47) θα είναι

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_{11} & -\dot{Z}_{12} \\ -\dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_\alpha \\ \dot{I}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{s1} \\ -\dot{V}_{s2} \end{bmatrix} \tag{5.48α}$$

ή

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{11}\dot{I}_\alpha - \dot{Z}_{12}\dot{I}_\beta &= \dot{V}_{s1} \\ -\dot{Z}_{21}\dot{I}_\alpha + \dot{Z}_{22}\dot{I}_\beta &= -\dot{V}_{s2} \end{aligned} \tag{5.48β}$$

όπου $\dot{Z}_{11}$ η ίδια σύνθετη αντίσταση του πρώτου βρόχου

$$\dot{Z}_{11} = 1+j2+2-j6 = 3-j4\ \Omega$$

$\dot{Z}_{22}$ η ίδια σύνθετη αντίσταση του δεύτερου βρόχου

$$\dot{Z}_{22} = 2+j-j6+2 = 4-j5\ \Omega$$

και $\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21}$ η σύνθετη αντίσταση του κοινού κλάδου των δύο βρόχων

$$\dot{Z}_{12} = 2-j6\ \Omega$$

Η λύση του συστήματος των εξισώσεων (5.48) είναι:

$$\dot{I}_{\alpha} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{V}_{s1} & -\dot{Z}_{12} \\ \dot{V}_{s2} & \dot{Z}_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{Z}_{11} & -\dot{Z}_{12} \\ -\dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} \end{vmatrix}} \quad \text{και} \quad \dot{I}_{\beta} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{V}_{s1} \\ -\dot{Z}_{21} & \dot{V}_{s2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{Z}_{11} & -\dot{Z}_{12} \\ -\dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} \end{vmatrix}} \tag{5.49}$$

Έχουμε:

$$\dot{I}_{\alpha} = \frac{\dot{V}_{S1}\dot{Z}_{22} - \dot{V}_{S2}\dot{Z}_{12}}{\dot{Z}_{11}\dot{Z}_{22} + \dot{Z}_{12}\dot{Z}_{21}} = \frac{10(4-j5) - j5(2-j6)}{((3-j4)(4-j5) - (2-j6)^2} = \frac{10-j60}{24-j7} =$$

$$= \frac{60.83\ \angle -80^{o}.54}{25\angle -16^{o}.26} = 2.433\angle -64^{o}.28\,\text{A}$$

και

$$\dot{I}_{\beta} = \frac{-\dot{Z}_{11}\dot{V}_{S2} + \dot{Z}_{21}\dot{V}_{S1}}{\dot{Z}_{11}\dot{Z}_{22} + \dot{Z}_{12}\dot{Z}_{21}} = \frac{-(3-j4)(j5) + (2-j6)10}{24-j7} = \frac{-j75}{24-j7} =$$

$$= \frac{75\ \angle -90^{o}}{25\angle -16^{o}.26} = 3\angle -73^{o}.74\,\text{A}$$

Από το σχ. 5.31 παρατηρούμε ότι

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{\alpha}, \dot{I}_2 = -\dot{I}_{\beta} \text{ και } \dot{I}_3 = \dot{I}_{\alpha} - \dot{I}_{\beta}$$

Άρα $$\dot{I}_1 = 2.433\angle -64^{o}.28\,\text{A},\ \dot{I}_2 = 3\angle -73^{o}.74\,\text{A} \tag{5.50}$$

και $$\dot{I}_3 = \frac{10-j60}{24-j7} - \frac{-j75}{24-j7} = \frac{10+j15}{24-j7} = \frac{18.03\ \angle 56^{o}.31}{25\angle -16^{o}.26}$$

ή

$$\dot{I}_3 = 0.72\ \angle 72^{o}.57\,\text{A} \tag{5.51}$$

Παίρνοντας υπόψη τις εξ. (5.50) και (5.51) προκύπτει ότι

$$\dot{i}_1(t) = 2.433 \cos(10^3 t - 64^o.28)\ A$$

$$\dot{i}_2(t) = 3 \cos(10^3 t - 73^o.74)\ A$$

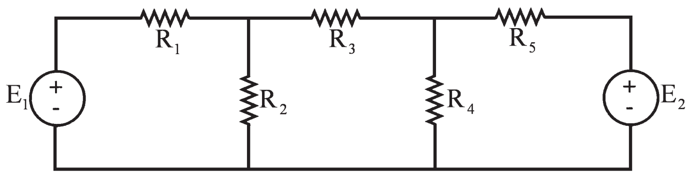
$$\dot{i}_3(t) = 0.72 \cos(10^3 t + 72^o.57)\ A$$

ενώ

$$\upsilon_{s1}(t) = 10 \cos 10^3 t\ V \quad \text{και} \quad \upsilon_{s2}(t) = 5 \cos(10^3 t + 90^o)\ V$$

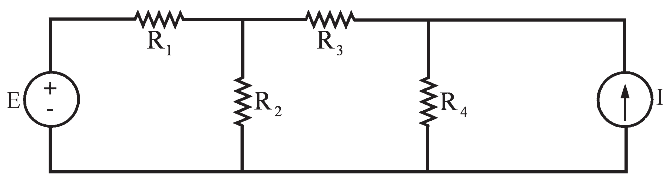
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

5.1. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των κόμβων να υπολογίσετε τα ρεύματα, που διαρρέουν τους αντιστάτες του κυκλώματος του σχ. 5.32. Δίνονται: E_1=15V, E_2=10V, R_1=4Ω, R_2=6Ω, R_3=1Ω, R_4=3Ω, R_5=2Ω.



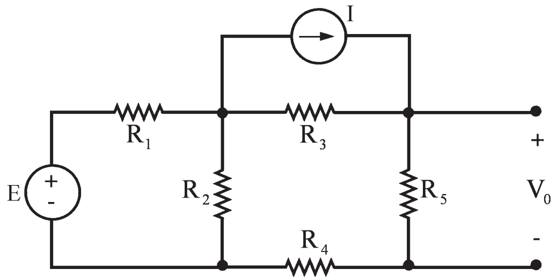
Σχήμα 5.32

5.2. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των κόμβων να υπολογίσετε τα ρεύματα, που διαρρέουν τους αντιστάτες του κυκλώματος του σχ. 5.33. Δίνονται: E=10V, I=2A, R_1=1Ω, R_2=5Ω, R_3=2Ω, R_4=10Ω.



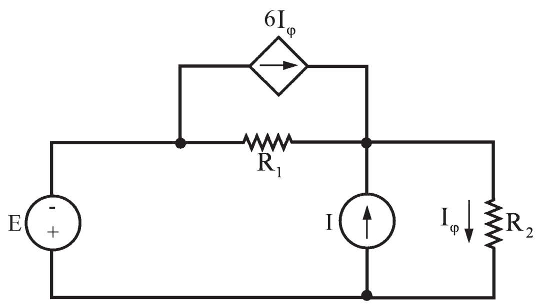
Σχήμα 5.33

5.3. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των κόμβων να υπολογίσετε την τάση εξόδου V_o στο κύκλωμα του σχ. 5.34. Δίνονται: E=15V, I=5A, R_1=3Ω, R_2=6Ω, R_3=2Ω, R_4=2Ω, R_5=2Ω.



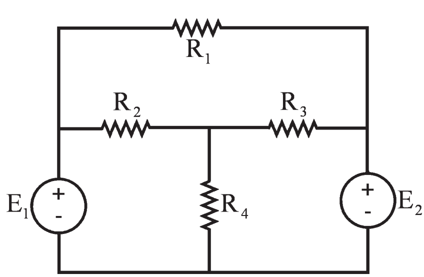
Σχήμα 5.34

5.4. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των κόμβων να βρείτε τα ρεύματα, που διαρρέουν τους αντιστάτες του κυκλώματος του σχ. 5.35. Δίνονται: E=70V, I=5A, R_1=5Ω, R_2=10Ω.



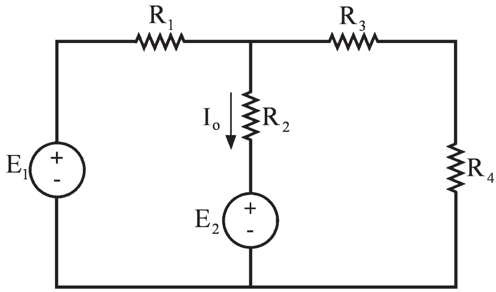
Σχήμα 5.35

5.5. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των βρόχων να υπολογίσετε τα ρεύματα, που διαρρέουν τους αντιστάτες του κυκλώματος του σχ. 5.36. Δίνονται E_1=250V, E_2=50V, R_1=10Ω, R_2=5Ω, R_3=6Ω, R_4=20Ω.



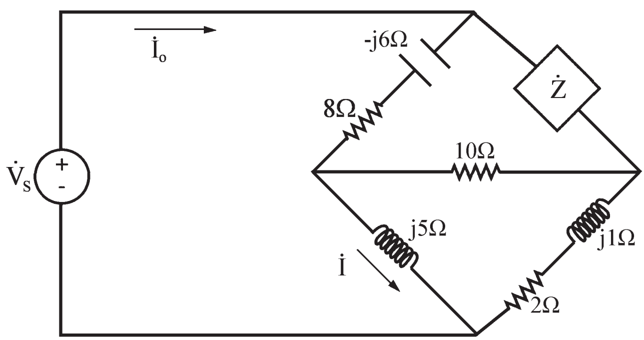
Σχήμα 5.36

5.6. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των βρόχων να υπολογίσετε το ρεύμα I_o στο κύκλωμα του σχ. 5.37. Δίνονται E_1=30V, E_2=20V, R_1=5Ω, R_2=10Ω, R_3=4Ω, R_4=6Ω.



Σχήμα 5.37

5.7. Να βρεθούν τα $\dot{I}_o$ και $\dot{Z}$ στο κύκλωμα του σχ. 5.38, εάν $\dot{V}_s$ =40+j30 V και $\dot{I} = 6\angle 0^o$ A

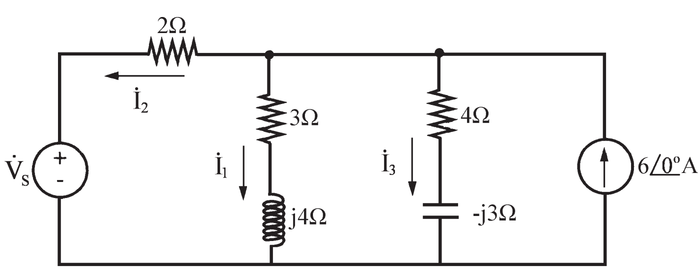


Σχήμα 5.38

5.8. Στο κύκλωμα του σχ. 5.39 είναι $\dot{I}_1 = 3\angle 0^o$ A

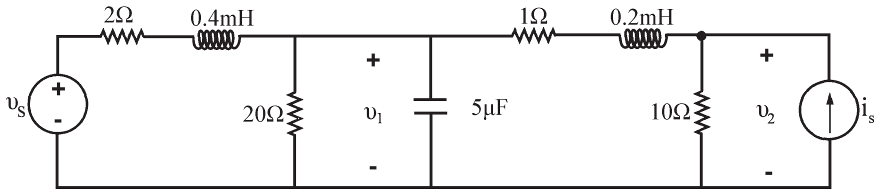
α) Να βρεθούν τα $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$ και $\dot{V}_s$

β) Αν ω =10^5 rad/s, να γραφούν οι εκφράσεις των $i_2(t)$, $i_3(t)$ και $\upsilon_s(t)$.



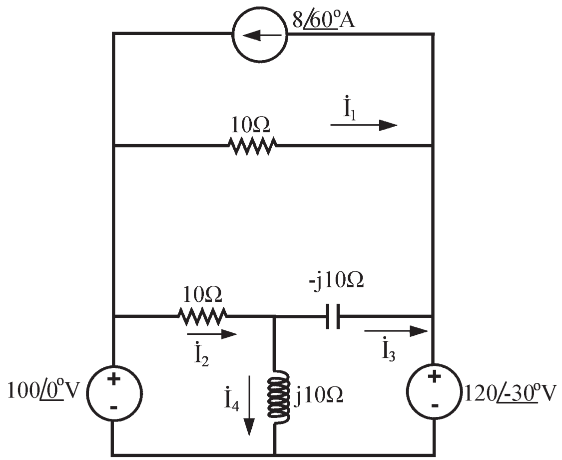
Σχήμα 5.39

5.9. Στο κύκλωμα του σχ.5.40 είναι $\upsilon_s = 20\sin(10^4 t)$V και $i_s = 5\cos(10^4 t - 60^o)$A. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των τάσεων των κόμβων να προσδιορίστε τις τάσεις $\upsilon_1(t)$ και $\upsilon_2(t)$ στη σταθερή κατάσταση λειτουργίας.



Σχήμα 5.40

5.10. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ρευμάτων των βρόχων να υπολογίσετε τα ρεύματα $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$ και $\dot{I}_4$ στο κύκλωμα του σχ. 5.41.



Σχήμα 5.41